Unendlichkeit und die Grenzen des Wissens

Andreas Fackler

8. September 2009

Mächtigkeiten

Mächtigkeit oder *Kardinalität* $|M|$ einer Menge M: Anzahl ihrer Elemente, z.B:

- $3 = |\{1, 2, 3\}|$
- $2 = |\{5, 7\}|$
- $0 = |\emptyset|$

Unendliche Mengen $\Rightarrow$ größere Klasse von *Kardinalzahlen*:

- $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$: Anzahl der natürlichen Zahlen.
- $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$: Anzahl der reellen Zahlen.

Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente?

Definition

M und N sind *gleichmächtig* („$|M| = |N|$“), wenn es eine umkehrbar eindeutige Funktion $f : M \to N$ gibt.

Beispiel: Die Funktion f mit

$$\begin{aligned} f(5) &= 1 \\ f(7) &= 2 \\ f(12) &= 3 \end{aligned}$$

zeigt: $|\{5, 7, 12\}| = |\{1, 2, 3\}|$.

Unendliche Mengen

Definition

Eine Menge ist *unendlich*, wenn Sie gleichmächtig zu einer echten Teilmenge ist.

Beispiel: $f(n) = n^2$, also:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 4 \\ f(3) &= 9 \\ f(4) &= 16 \\ &\vdots \end{aligned}$$

zeigt, dass $\mathbb{N}$ gleichmächtig zur Menge der Quadratzahlen ist.

Cantors Diagonalargument

Satz (Cantor 1877)

Es gibt mehr reelle als natürliche Zahlen: $\mathfrak{c} > \aleph_0$.

Beweis: Betrachte eine beliebige Funktion
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, z.B.:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 5.46719\ldots \\
f(2) &= -88.12345\ldots \\
f(3) &= 151.50505\ldots \\
f(4) &= 3.14159\ldots \\
f(5) &= 0.00003\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Cantors Diagonalargument

Wähle $x \in]0,1[$ so, dass x sich in der n-ten Nachkommastelle von $f(n)$ unterscheidet, etwa:

$$\begin{array}{rcr} x & = & 0.55445\ldots \\ f(1) & = & 5.46719\ldots \\ f(2) & = & -88.12345\ldots \\ f(3) & = & 151.50505\ldots \\ f(4) & = & 3.14159\ldots \\ f(5) & = & 0.00003\ldots \\ & \vdots & \end{array}$$

Für jedes n ist $x \neq f(n)$. Also if f nicht umkehrbar eindeutig und damit $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$. Es folgt:

$$\mathfrak{c} > \aleph_0$$

Die Kontinuumshypothese

Die nächstgrößere Kardinalzahl nach $\aleph_0$ heißt $\aleph_1$:

$$0, 1, 2, \ldots \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$$

Welche dieser Zahlen ist nun $\mathfrak{c}$, bzw. $|\mathbb{R}|$?

Kontinuumshypothese (Cantor 1878)

Es gibt keine Menge, die mehr Elemente hat als $\mathbb{N}$, aber weniger als $\mathbb{R}$, d.h.:

$$\mathfrak{c} = \aleph_1$$

Stimmt die Kontinuumshypothese?

- Gödel 1938: Könnte sein.
- Cohen 1963: Muss aber nicht!

Aus den Grundannahmen der Mengenlehre, den Zermelo-Fraenkelschen Axiomen, folgt weder, dass die Kontinuumshypothese richtig ist, noch, dass sie falsch ist!

Das Axiomensystem ist also *unvollständig*.

Also sollte man es vervollständigen und die fehlenden Grundannahmen hinzufügen ... oder?

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Satz (Gödel 1931)

Jedes widerspruchsfreie, effektiv beschreibbare Axiomensystem, das hinreichend viele Aussagen über $\mathbb{N}$ *enthält, ist unvollständig.*

Beweisskizze: Man kann in etwa die folgende Aussage als Satz über natürliche Zahlen kodieren:

„in Anführungszeichen, gefolgt von sich selbst, ist nicht beweisbar.“ in Anführungszeichen, gefolgt von sich selbst, ist nicht beweisbar.

Das Halteproblem

Satz (Turing 1936)

Es ist unmöglich, ein Computerprogramm zu schreiben, das für beliebige Eingaben `p` *und* `x` *entscheidet, ob der Programmaufruf* `p(x)` *jemals anhalten würde.*

Beweis: Angenommen, `haelt` wäre so ein Programm:

- `>>> haelt(einsdurch,5)`
- `True`
- `>>> haelt(einsdurch,0)`
- `False`

Das Halteproblem

Wir verwenden `haelt` in einem neuen Programm:

Programm „absurd“

```
def absurd(x):
  if(haelt(x,x)):
    while(1<2): print('blabla')
  else: return
```

`absurd(x)` stürzt also genau dann ab, wenn `x(x)` nicht abstürzt.

- `>>> absurd(absurd)`
- ↯

Literatur

- Douglas R. Hofstadter: *Gödel, Escher, Bach: Ein Endloses Geflochtenes Band*
- Oliver Deiser: *Einführung in die Mengenlehre*
- Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, Wolfgang Thomas: *Einführung in die mathematische Logik*