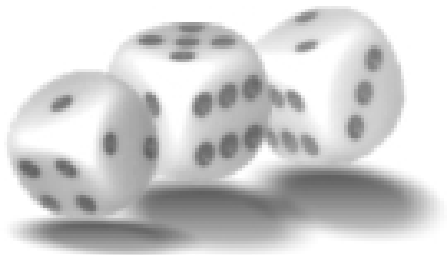
Stochastik: Ein kurzer Ueberblick

in 20 Minuten

Sebastian Carstens

08.09.2009



Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen
2. Vielfalt der Stochastik
3. Statistik
   - Problemstellung
4. Wahrscheinlichkeitstheorie
5. Bernoulliperkolation
   - Fragestellung
   - Beschreibung des Modells
   - Simulation ohne Kopplung
   - Aussage und Beweisskizze
   - Simulation mit Kopplung
6. Ende

1. Grundlagen
2. Vielfalt der Stochastik
3. Statistik
   - Problemstellung
4. Wahrscheinlichkeitstheorie
5. Bernoulliperkolation
   - Fragestellung
   - Beschreibung des Modells
   - Simulation ohne Kopplung
   - Aussage und Beweisskizze
   - Simulation mit Kopplung
6. Ende

Zufall

Definition

Stochastik beschaeftigt sich mit der Beschreibung und Analyse von Vorgaengen, die zufaellig sind oder zumindest als zufaellig erscheinen.

Zufall:

- **unechter:** Bei genuegend grossem Informationsstand koennten wir die scheinbar zufaelligen Ereignisse sicher vorhersagen.
- **echter:** Bei beliebig grossem Informationsstand koennten wir die zufaelligen Ereignisse nicht sicher vorhersagen.

Quantifizieren des Zufalls

Natuerliche Frage:

Wie koennen wir den Zufall beherrschen?

Quantifizieren des Zufalls:

Wir legen die fuer uns interessanten Ereignisse fest und ordnen jedem Ereignis eine Zahl in $[0, 1]$ zu, welche die Wahrscheinlichkeit widerspiegeln soll.[1]

[1] Hierbei soll diese Zuordnung nicht unserer Intuition widersprechen.

1 Grundlagen

2 Vielfalt der Stochastik

3 Statistik
- Problemstellung

4 Wahrscheinlichkeitstheorie

5 Bernoulliperkolation
- Fragestellung
- Beschreibung des Modells
- Simulation ohne Kopplung
- Aussage und Beweisskizze
- Simulation mit Kopplung

6 Ende

Stochastik

Die Stochastik besteht aus

- **Statistik:**
  Aus realen Daten die dahinterliegenden Gesetzmaessigkeiten zu erkennen.
- **Wahrscheinlichkeitstheorie:**
  Mathematische Modelle fuer spezielle reale Phaenomene aufstellen und analysieren.

Teilgebiete der Stochastik

Bekannte Teilgebiete der Stochastik:

- Finanzmathematik (siehe Vortrag von Daniel Rost)

Teilgebiete der Stochastik

Bekannte Teilgebiete der Stochastik:

- Finanzmathematik (siehe Vortrag von Daniel Rost)
- Versicherungsmathematik (z.B. Naturkatastrophen)

Teilgebiete der Stochastik

Bekannte Teilgebiete der Stochastik:

- Finanzmathematik (siehe Vortrag von Daniel Rost)
- Versicherungsmathematik (z.B. Naturkatastrophen)
- Biomathematik (z.B. Populationsmodelle)

Teilgebiete der Stochastik

Bekannte Teilgebiete der Stochastik:

- Finanzmathematik (siehe Vortrag von Daniel Rost)
- Versicherungsmathematik (z.B. Naturkatastrophen)
- Biomathematik (z.B. Populationsmodelle)
- Informationstheorie (z.B. Uebermittelung von Daten in rauschenden Kanaelen)

Teilgebiete der Stochastik

Bekannte Teilgebiete der Stochastik:

- Finanzmathematik (siehe Vortrag von Daniel Rost)
- Versicherungsmathematik (z.B. Naturkatastrophen)
- Biomathematik (z.B. Populationsmodelle)
- Informationstheorie (z.B. Uebermittelung von Daten in rauschenden Kanaelen)
- Statistische Physik (z.B. die Temperatur eines Gases aus den Bewegungsgesetzen der Teilchen herleiten)

Teilgebiete der Stochastik

Bekannte Teilgebiete der Stochastik:

- Finanzmathematik (siehe Vortrag von Daniel Rost)
- Versicherungsmathematik (z.B. Naturkatastrophen)
- Biomathematik (z.B. Populationsmodelle)
- Informationstheorie (z.B. Uebermittelung von Daten in rauschenden Kanaelen)
- Statistische Physik (z.B. die Temperatur eines Gases aus den Bewegungsgesetzen der Teilchen herleiten)

1 Grundlagen

2 Vielfalt der Stochastik

3 Statistik
- Problemstellung

4 Wahrscheinlichkeitstheorie

5 Bernoulliperkolation
- Fragestellung
- Beschreibung des Modells
- Simulation ohne Kopplung
- Aussage und Beweisskizze
- Simulation mit Kopplung

6 Ende

typische Problemstellungen in der Statistik

Problemstellung:

Gegeben: Datensatz

Gesucht: Das den Datensatz verursachende Wahrscheinlichkeitsmass

typische Problemstellungen in der Statistik

Problemstellung:

Gegeben: Datensatz

Gesucht: Das den Datensatz verursachende Wahrscheinlichkeitsmass

Methode:

1. Bestimmung der denkbaren Wahrscheinlichkeitsmasse
2. Schaetzung der Charakteristika des Wahrscheinlichkeitsmasses

typische Problemstellungen in der Statistik

Problemstellung:

Gegeben: Datensatz

Gesucht: Das den Datensatz verursachende Wahrscheinlichkeitsmass

Methode:

1. Bestimmung der denkbaren Wahrscheinlichkeitsmasse
2. Schaetzung der Charakteristika des Wahrscheinlichkeitsmasses

Problem: Guetekriterien, Irrtumswahrscheinlichkeiten

typische Problemstellungen in der Statistik

Problemstellung:

Gegeben: Datensatz

Gesucht: Das den Datensatz verursachende Wahrscheinlichkeitsmass

Methode:

1. Bestimmung der denkbaren Wahrscheinlichkeitsmasse
2. Schaetzung der Charakteristika des Wahrscheinlichkeitsmasses

Problem: Guetekriterien, Irrtumswahrscheinlichkeiten

Illustration der Problemstellung

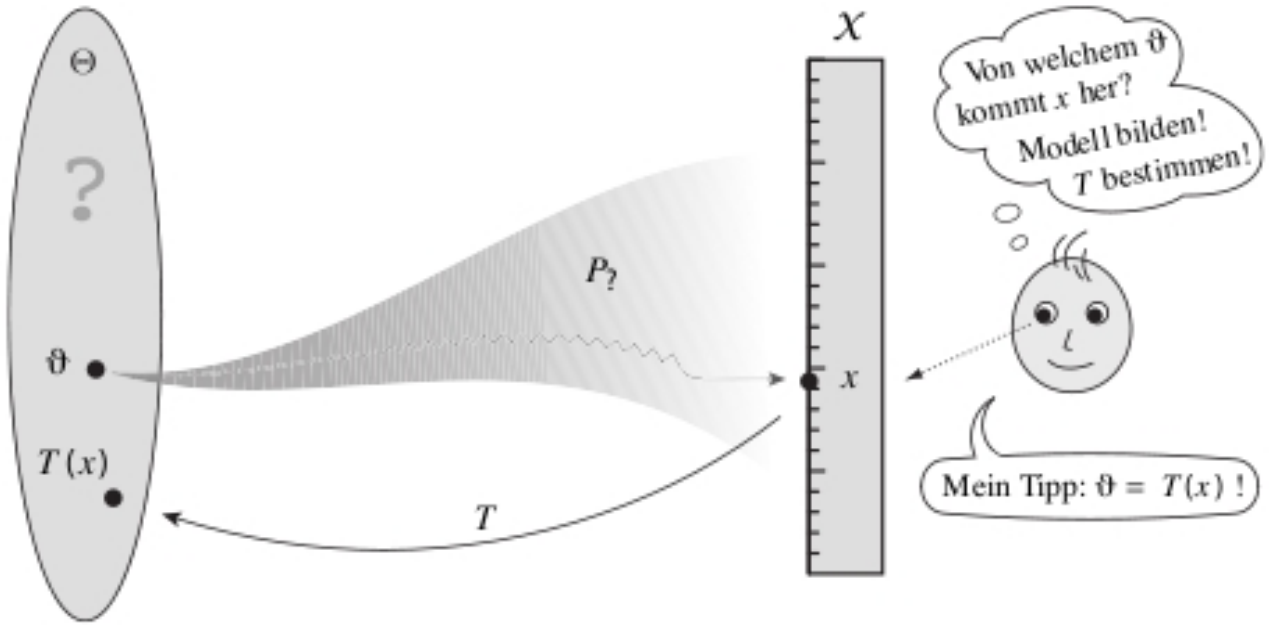


Figure: Quelle: Stochastik: Einfuehrung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (de Gruyter Lehrbuch) von Hans-Otto Georgii

1 Grundlagen

2 Vielfalt der Stochastik

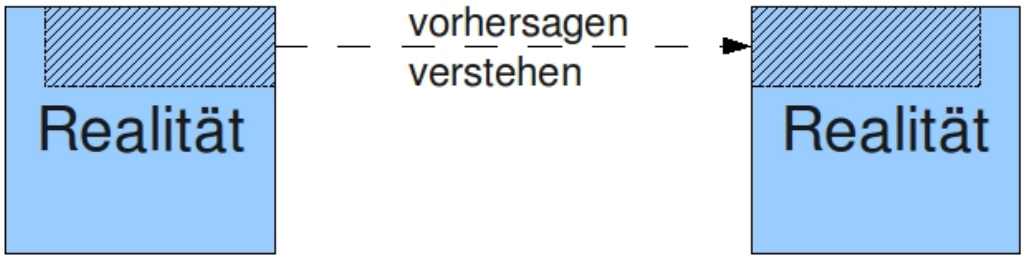
3 Statistik
- Problemstellung

4 Wahrscheinlichkeitstheorie

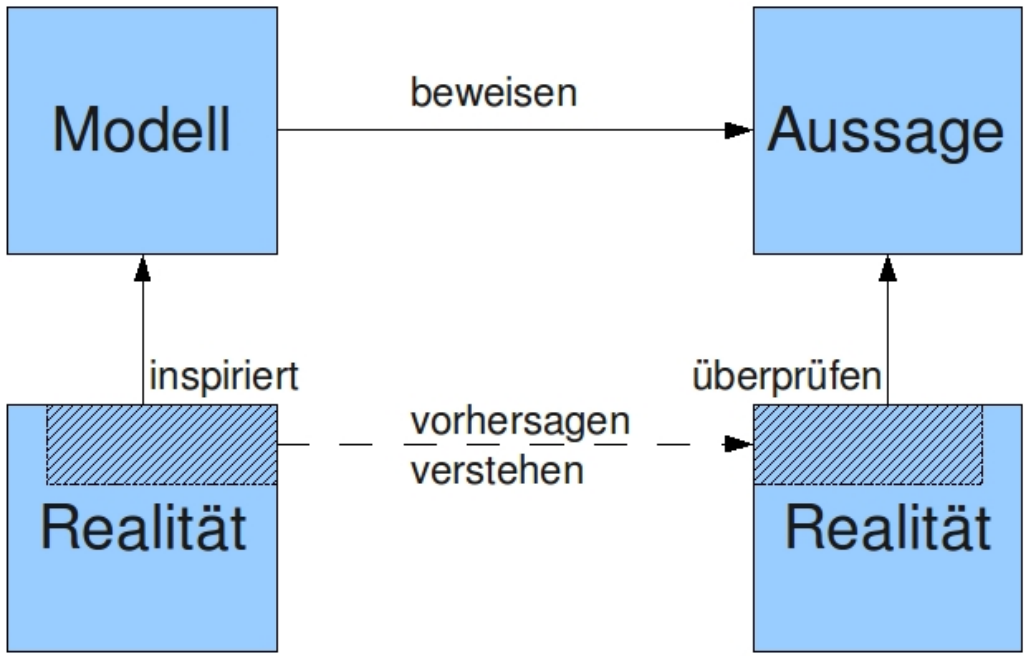
5 Bernoulliperkolation
- Fragestellung
- Beschreibung des Modells
- Simulation ohne Kopplung
- Aussage und Beweisskizze
- Simulation mit Kopplung

6 Ende

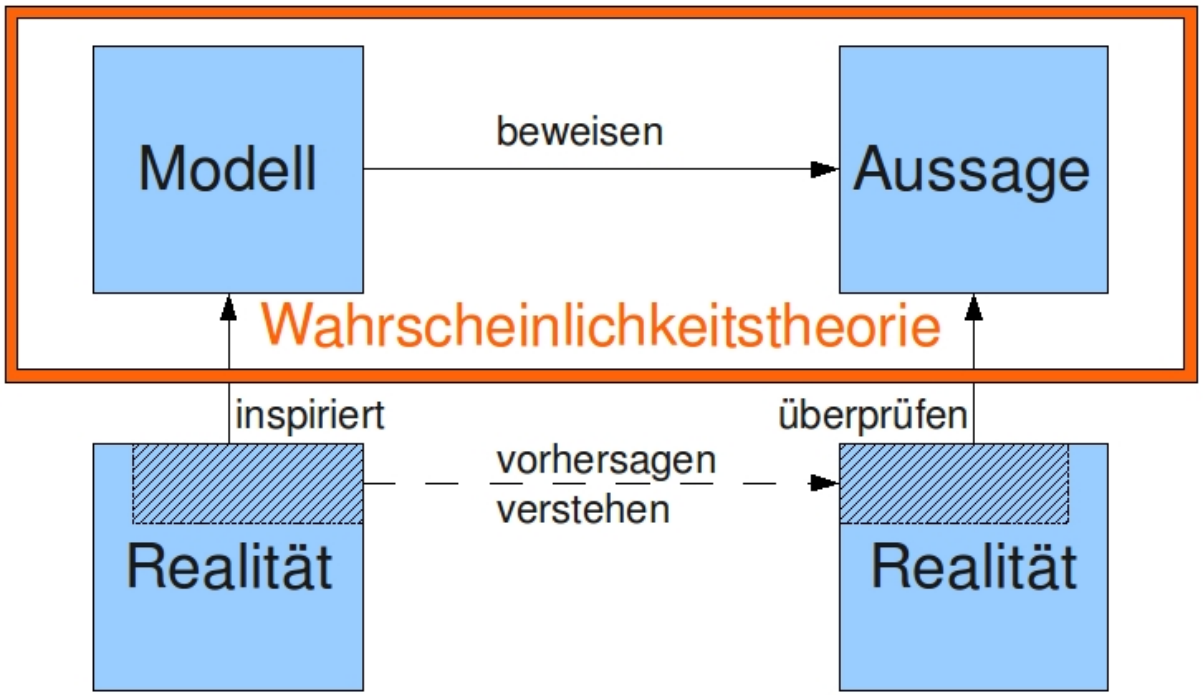
Wahrscheinlichkeitstheorie graphisch



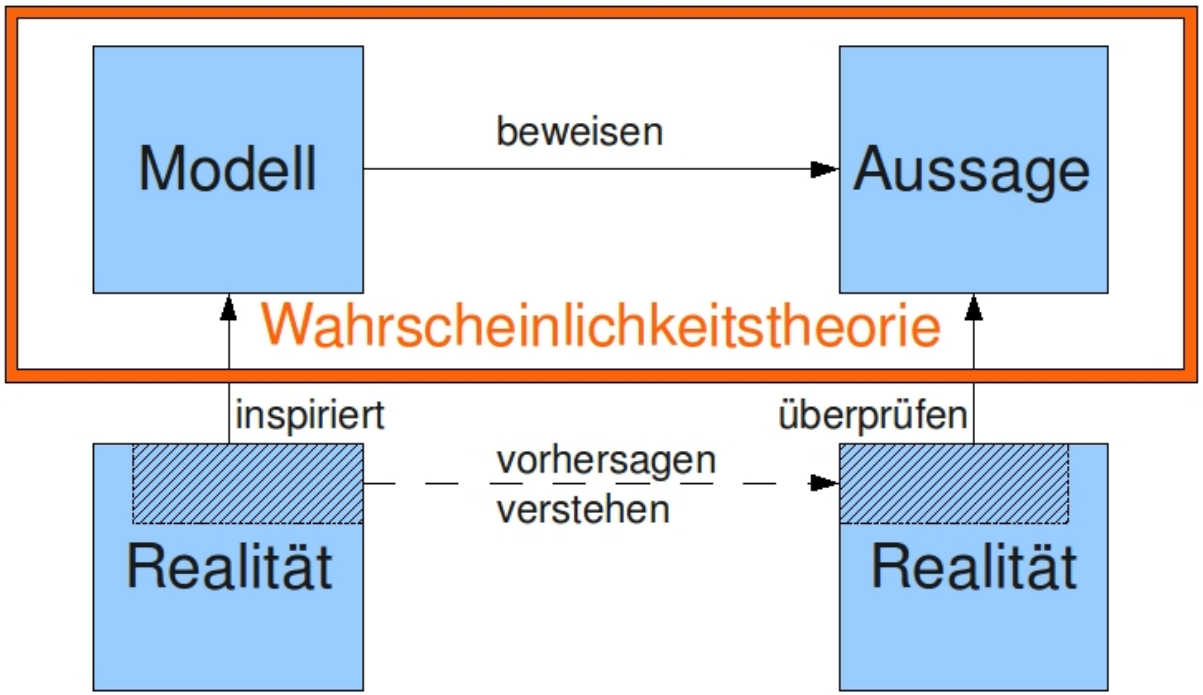
Wahrscheinlichkeitstheorie graphisch



Wahrscheinlichkeitstheorie graphisch



Wahrscheinlichkeitstheorie graphisch



Wir betrachten als Beispiel die Bernoulliperkolation

1 Grundlagen

2 Vielfalt der Stochastik

3 Statistik
- Problemstellung

4 Wahrscheinlichkeitstheorie

5 Bernoulliperkolation
- Fragestellung
- Beschreibung des Modells
- Simulation ohne Kopplung
- Aussage und Beweisskizze
- Simulation mit Kopplung

6 Ende

reale Fragestellung:

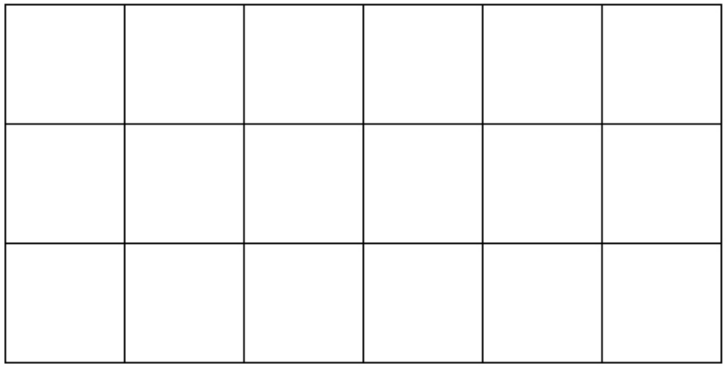
Wir mischen eine wasserundurchlaessige Substanz mit einer wasserdurchlaessigen Substanz, z.B. Luft und Stein.

Frage:

Bei welchen Mischungsverhaeltnis kann Wasser dieses Gemisch durchdringen?

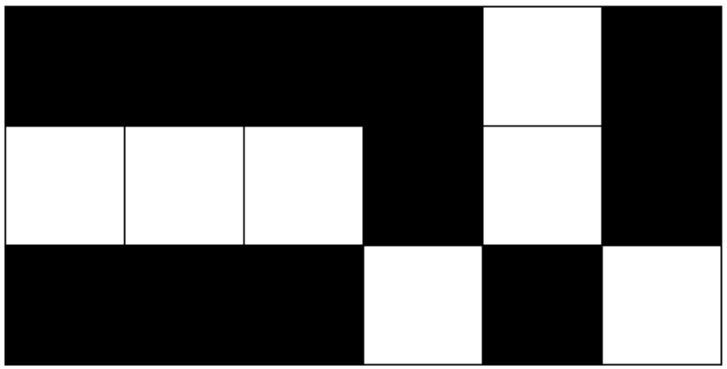
Beschreibung des mathematischen Modells:

- Wir betrachten ein unendliches "Schachbrett".
- In jedem Feld kann entweder ein Stein liegen oder nicht.



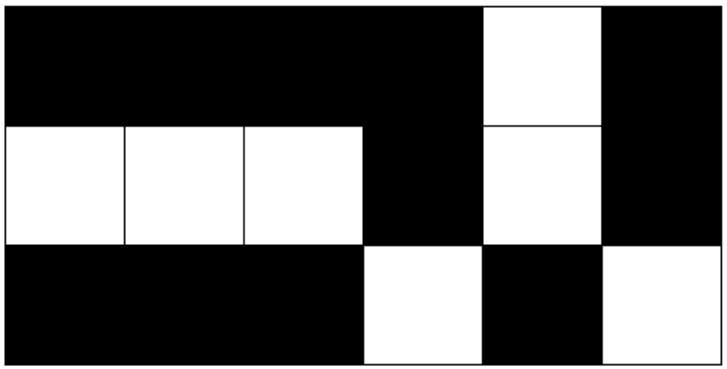
Beschreibung des mathematischen Modells:

- Wir betrachten ein unendliches "Schachbrett".
- In jedem Feld kann entweder ein Stein liegen oder nicht.
- Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "In Feld xy liegt kein Stein" soll p sein.



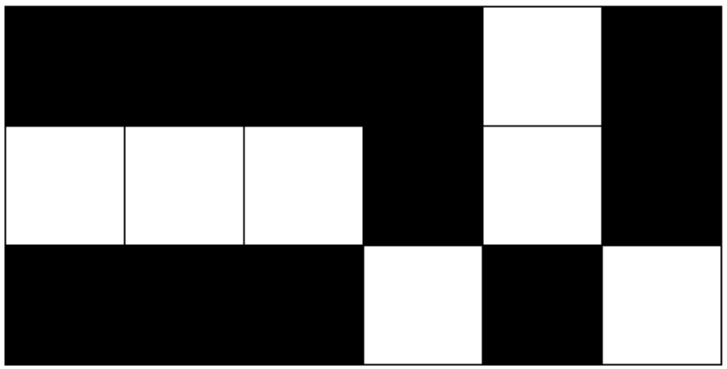
Beschreibung des mathematischen Modells:

- Wir betrachten ein unendliches "Schachbrett".
- In jedem Feld kann entweder ein Stein liegen oder nicht.
- Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "In Feld xy liegt kein Stein" soll p sein.
- Die Felder werden unabhaengig voneinander mit einem Stein (oder auch nicht) besetzt.



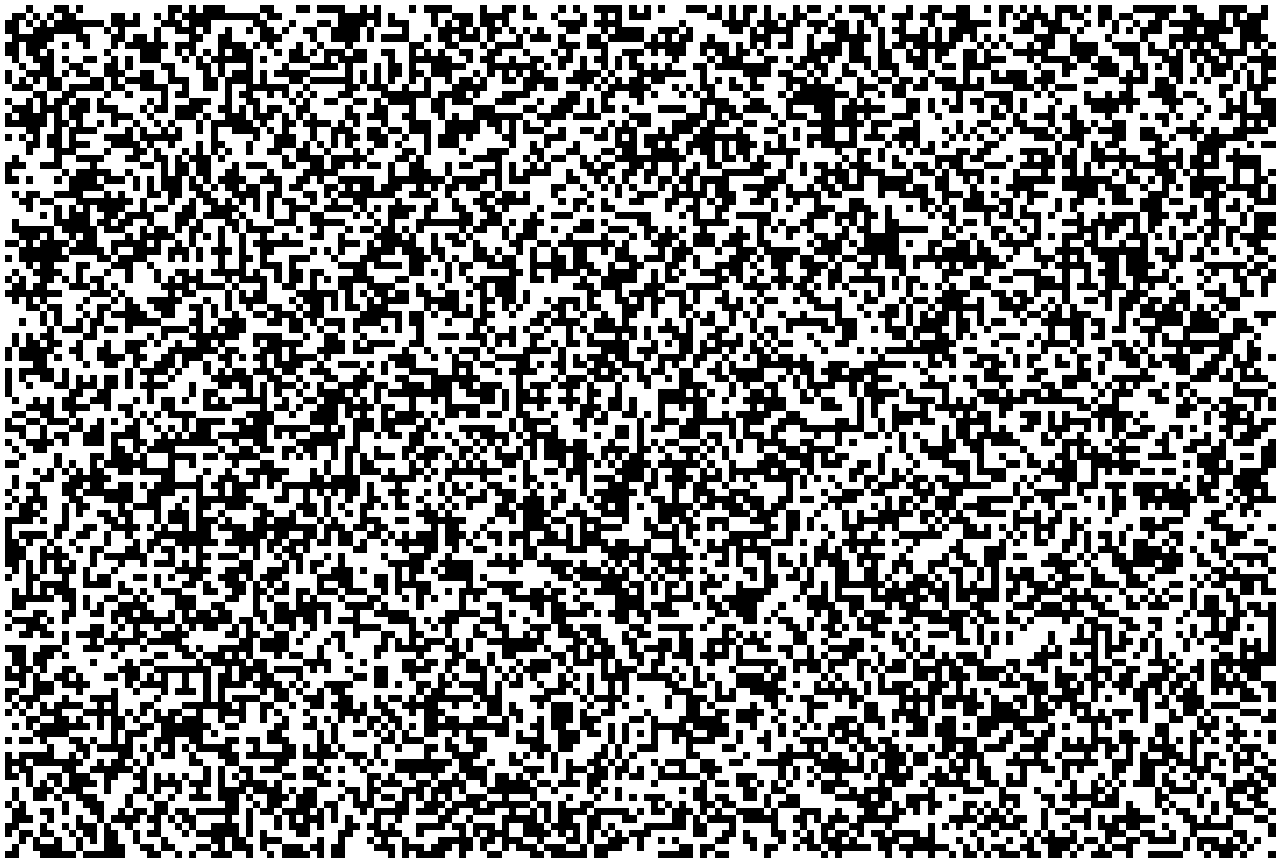
Beschreibung des mathematischen Modells:

- Wir betrachten ein unendliches "Schachbrett".
- In jedem Feld kann entweder ein Stein liegen oder nicht.
- Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "In Feld xy liegt kein Stein" soll p sein.
- Die Felder werden unabhaengig voneinander mit einem Stein (oder auch nicht) besetzt.



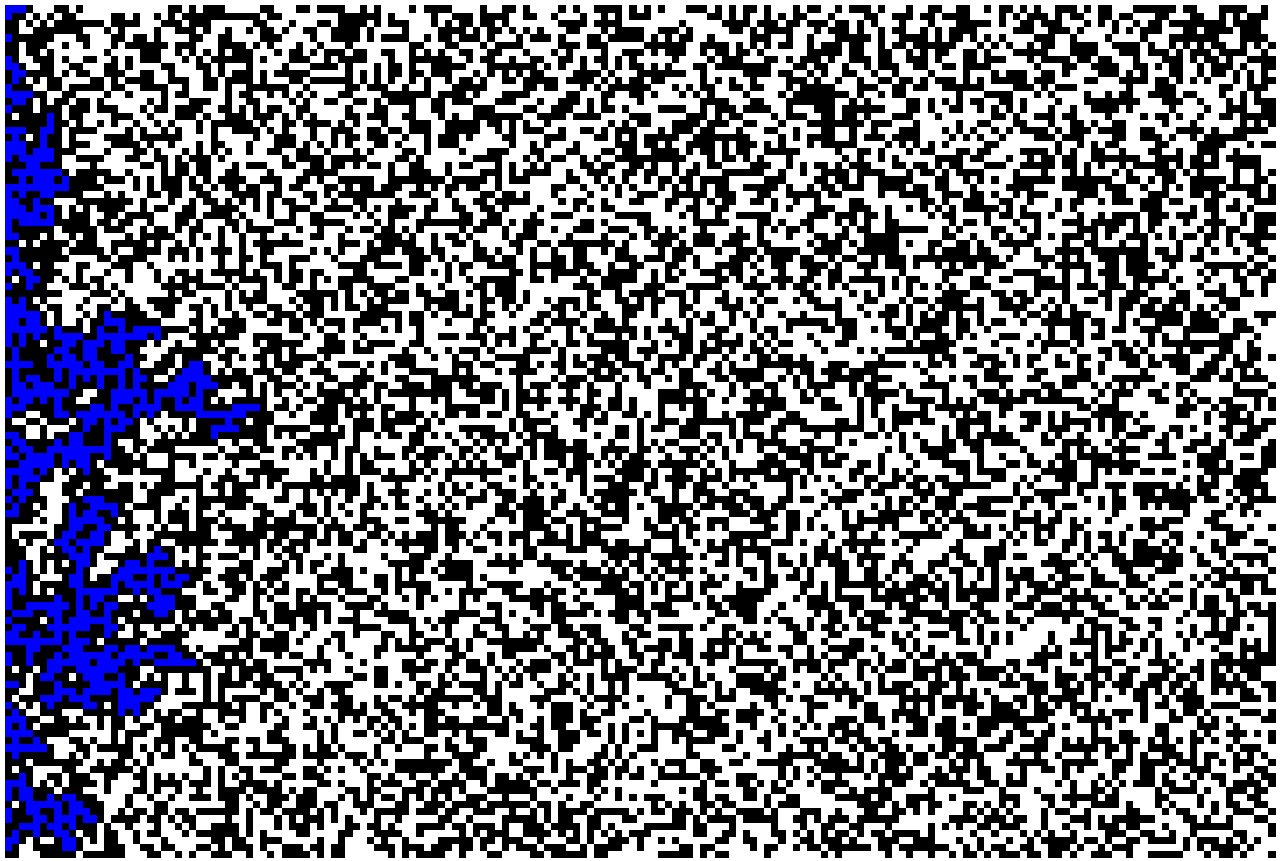
Simulation

Wir waehlen $p = 0,5$:



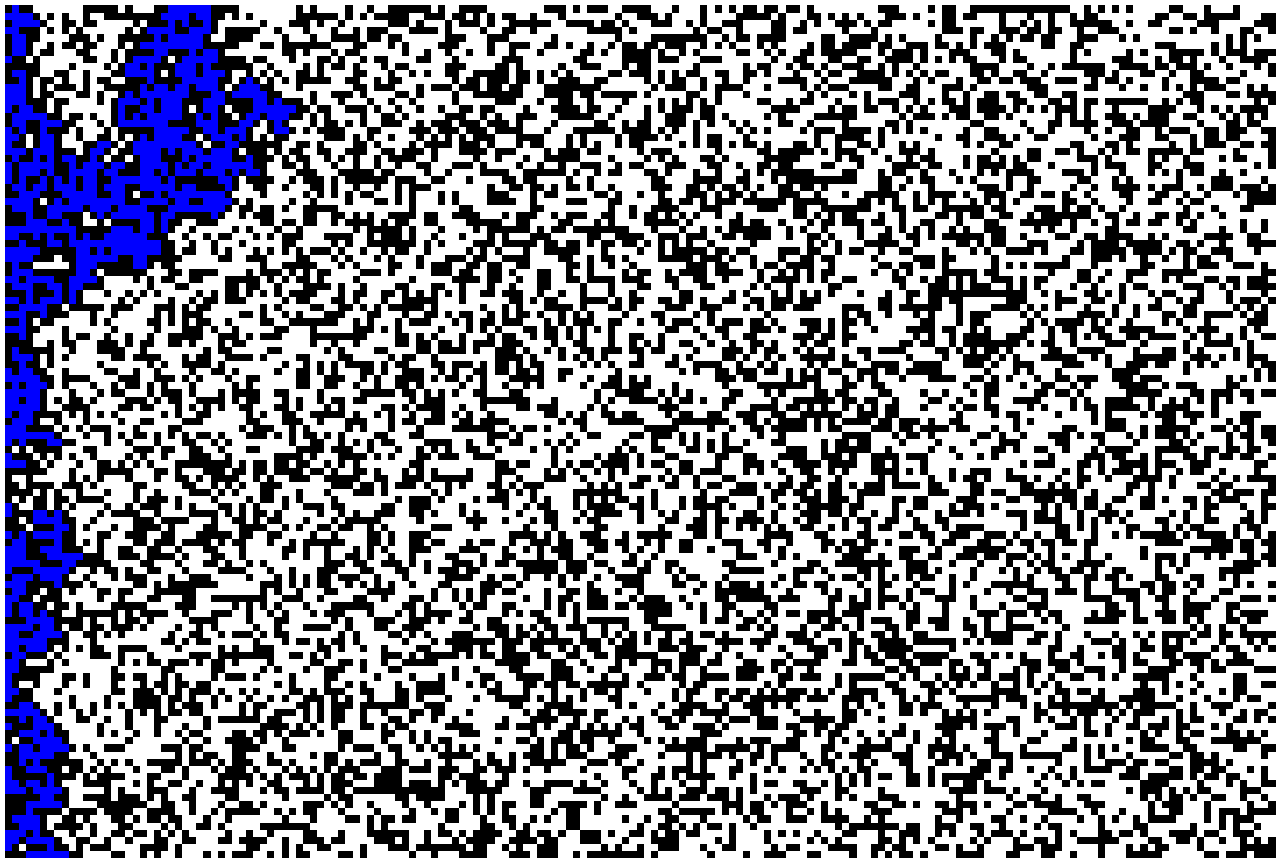
Simulation

Wir waehlen $p = 0,5$:



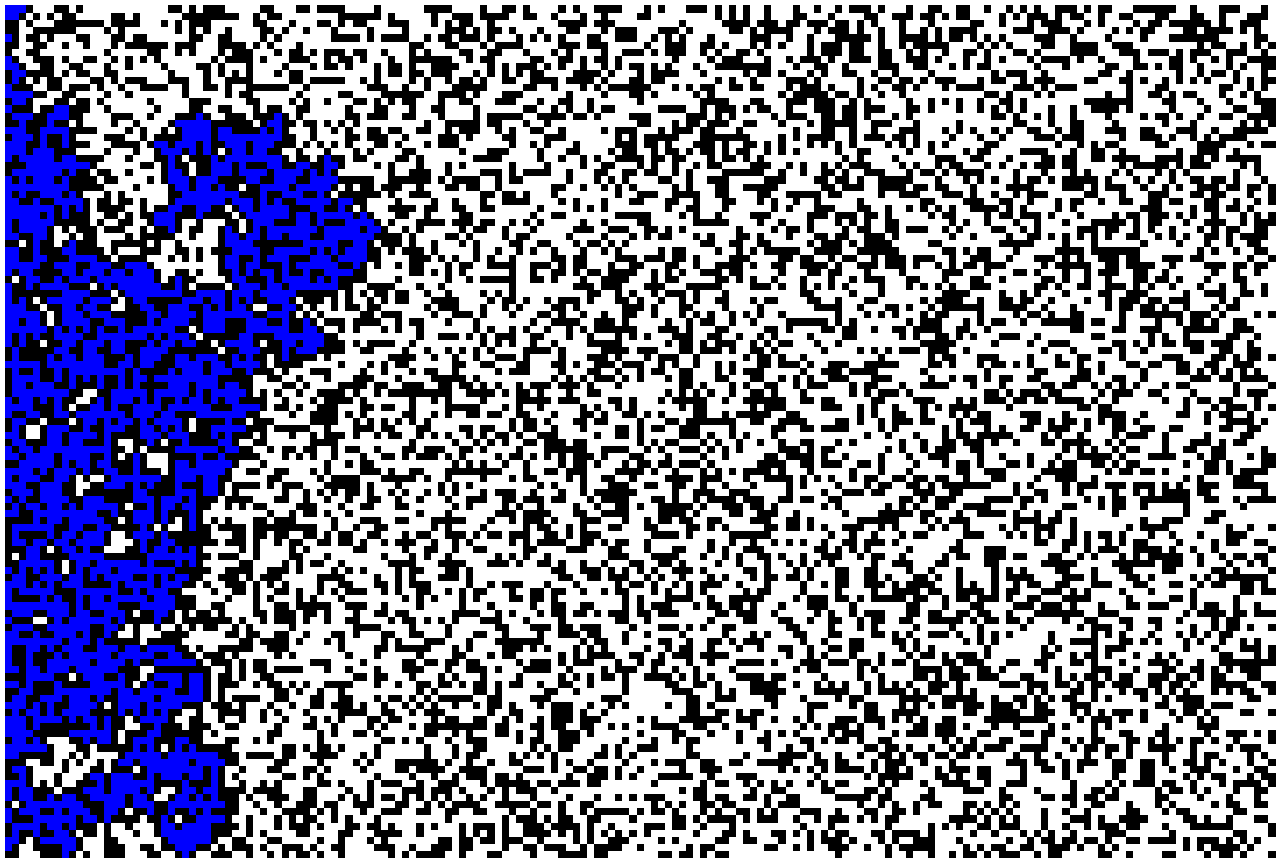
Simulation

Wir waehlen $p = 0,56$:



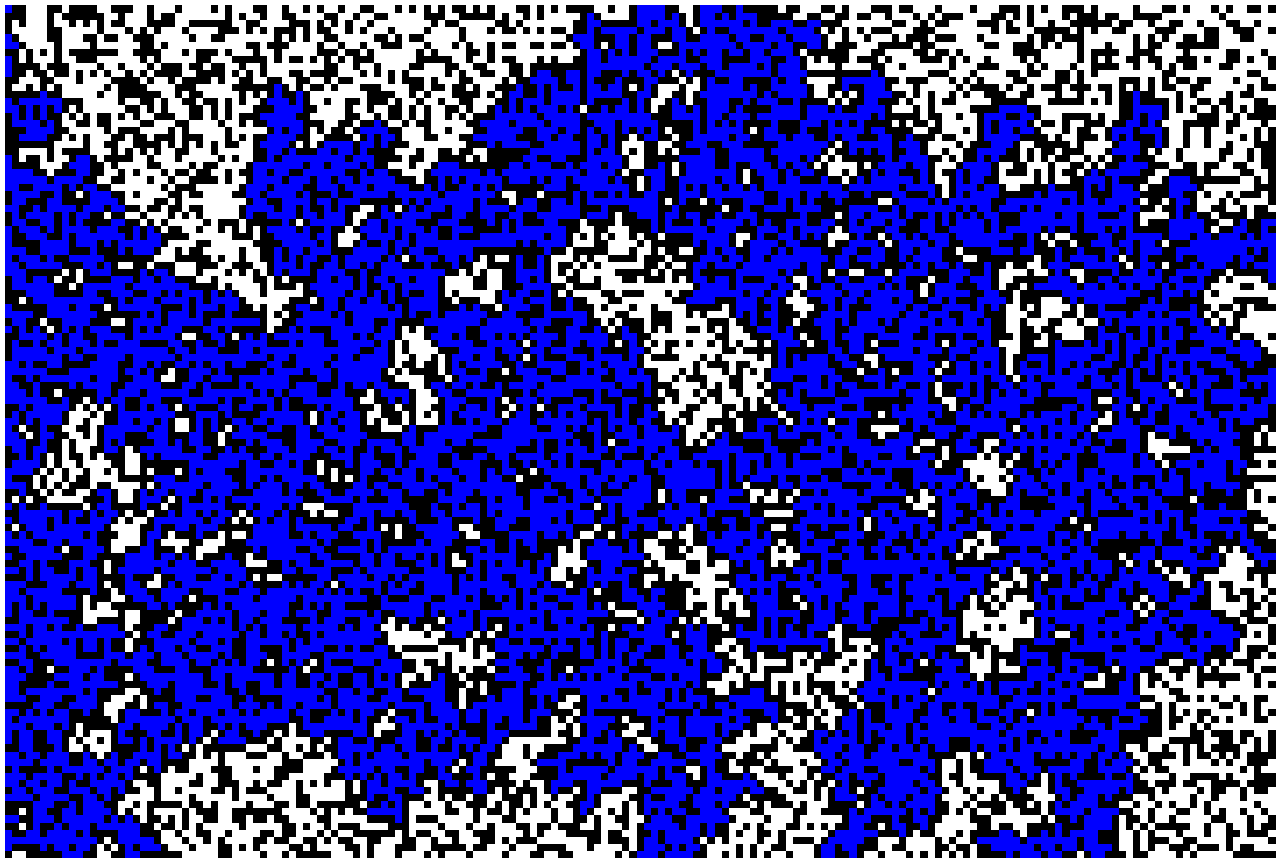
Simulation

Wir waehlen $p = 0,58$:



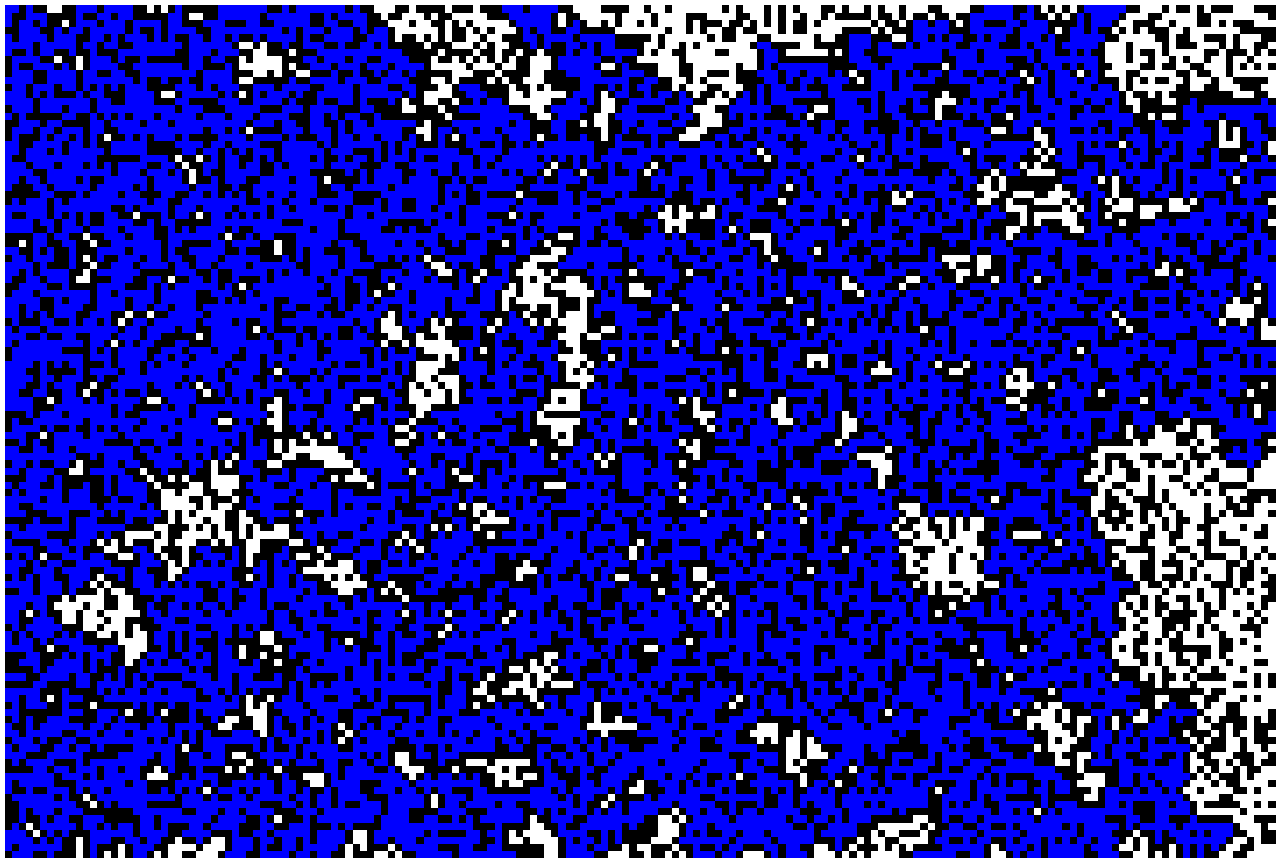
Simulation

Wir waehlen $p = 0,59$:



Simulation

Wir waehlen $p = 0,6$:



Aussage

Satz

Bis zu einem kritischem p_c kann Wasser das Gemisch nicht durchdringen. Ab p_c entsteht fuer das Wasser die Moeglichkeit eines Kanals/Durchgangs.

Kopplung

Beweisskizze

- Wir ordnen den Feldern unabhaengige Zufallszahlen in $[0, 1]$ zu.
- Ist die Zufallszahl kleiner $p = 0,5$, dann ist dieses Feld leer.

0,55	0,51	0,89	0,72	0,11	0,8
0,49	0,33	0,04	0,87	0,01	0,53
0,68	0,59	0,52	0,57	0,59	0,99

Kopplung

Beweisskizze

- Wir ordnen den Feldern unabhaengige Zufallszahlen in $[0, 1]$ zu.
- Ist die Zufallszahl kleiner $p = 0,5$, dann ist dieses Feld leer.
- Waehlen wir ein groesseres $p' = 0,6$, dann loesen sich ein paar Steine auf.

0,55	0,51	0,89	0,72	0,11	0,8
0,49	0,33	0,04	0,87	0,01	0,53
0,68	0,59	0,52	0,57	0,59	0,99

Kopplung

Beweisskizze

- Wir ordnen den Feldern unabhaengige Zufallszahlen in $[0, 1]$ zu.
- Ist die Zufallszahl kleiner $p = 0,5$, dann ist dieses Feld leer.
- Waehlen wir ein groesseres $p' = 0,6$, dann loesen sich ein paar Steine auf.
- Gibt es also einen Kanal fuer p, dann erst recht fuer p'!

0,55	0,51	0,89	0,72	0,11	0,8
0,49	0,33	0,04	0,87	0,01	0,53
0,68	0,59	0,52	0,57	0,59	0,99

Kopplung

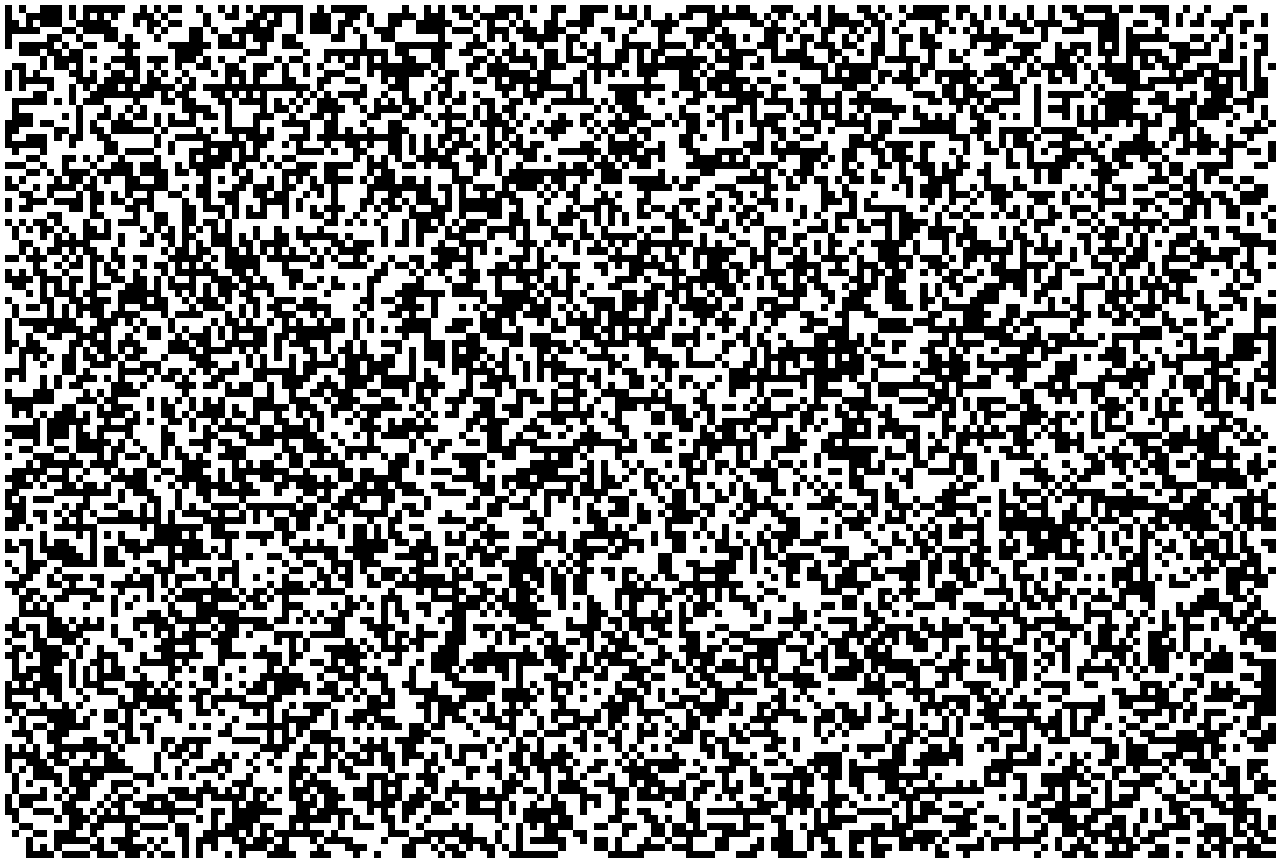
Beweisskizze

- Wir ordnen den Feldern unabhaengige Zufallszahlen in $[0, 1]$ zu.
- Ist die Zufallszahl kleiner $p = 0,5$, dann ist dieses Feld leer.
- Waehlen wir ein groesseres $p' = 0,6$, dann loesen sich ein paar Steine auf.
- Gibt es also einen Kanal fuer p, dann erst recht fuer p'!

0,55	0,51	0,89	0,72	0,11	0,8
0,49	0,33	0,04	0,87	0,01	0,53
0,68	0,59	0,52	0,57	0,59	0,99

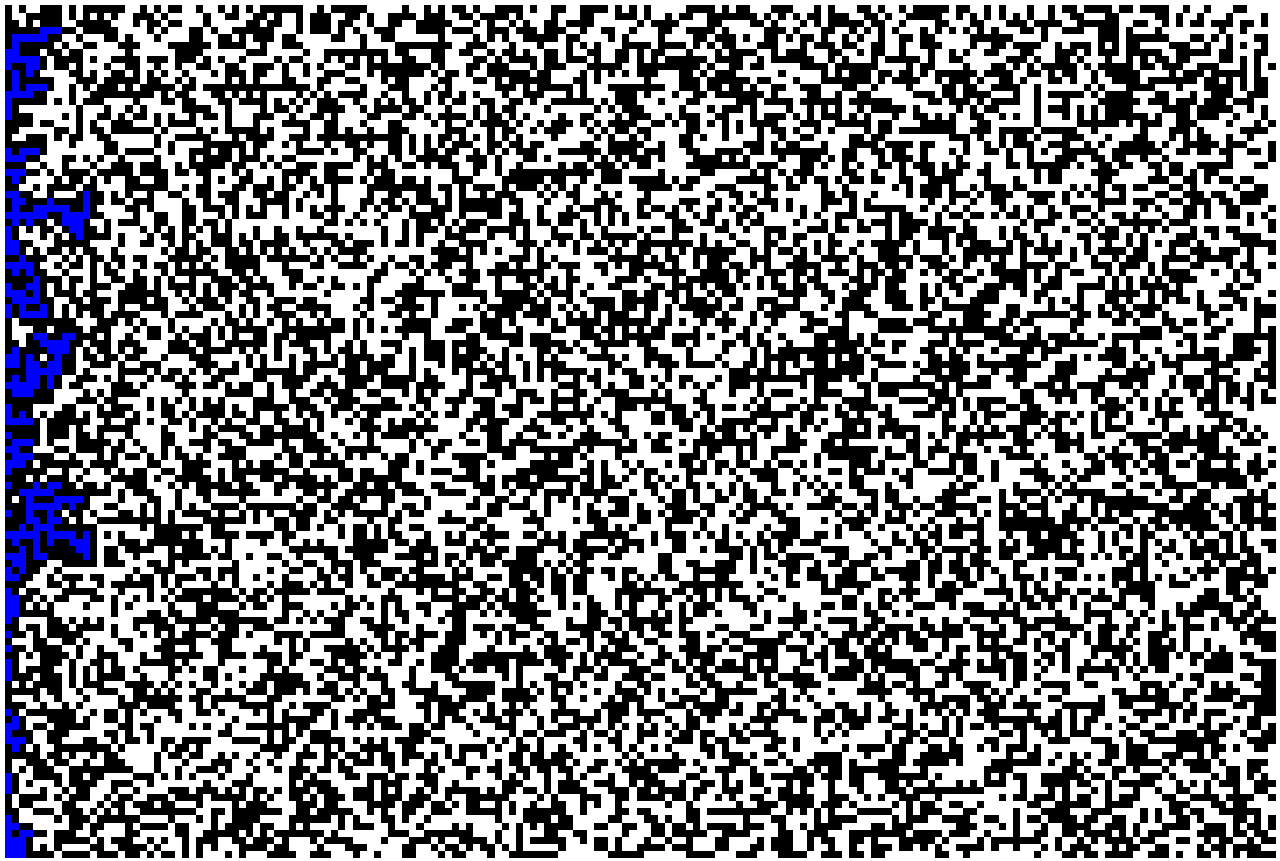
Simulation

Wir waehlen $p = 0,5$:



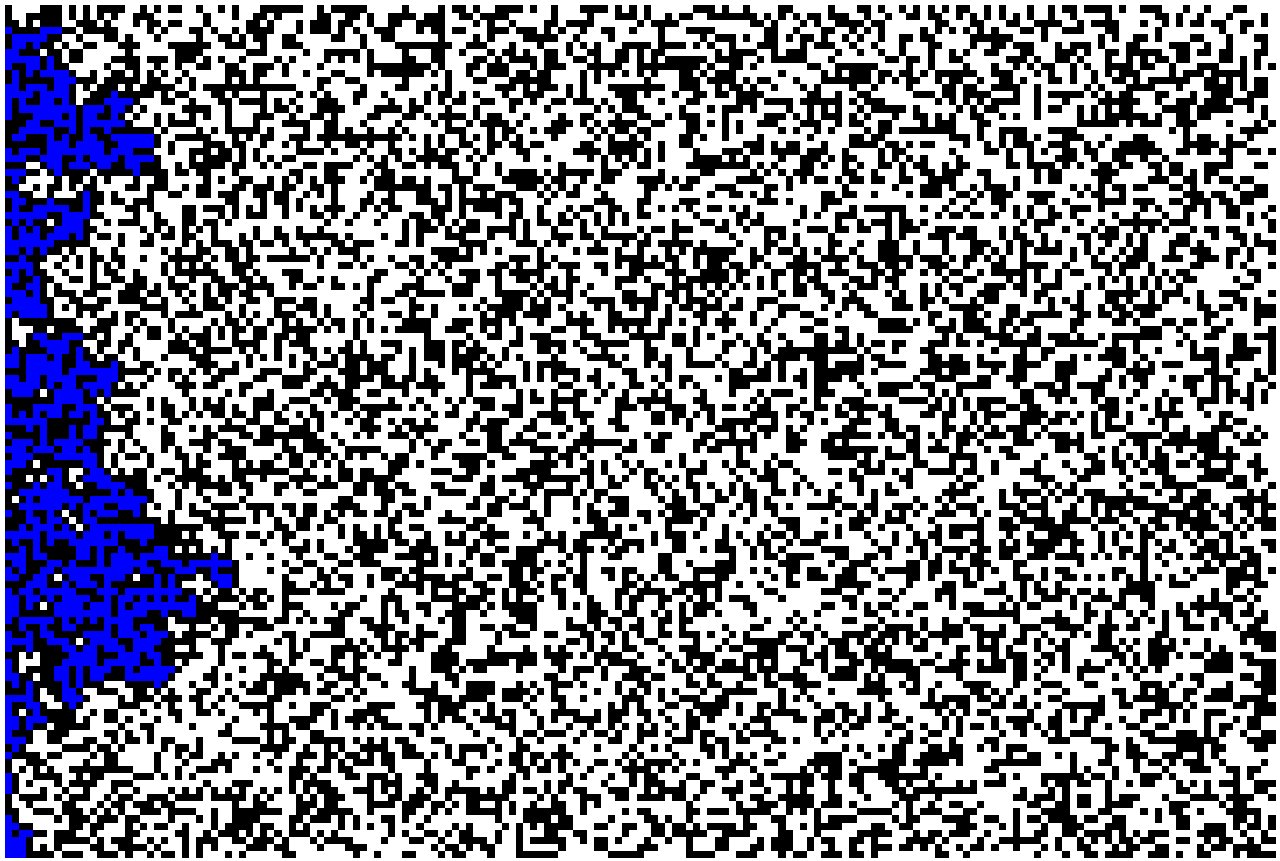
Simulation

Wir waehlen $p = 0,5$:



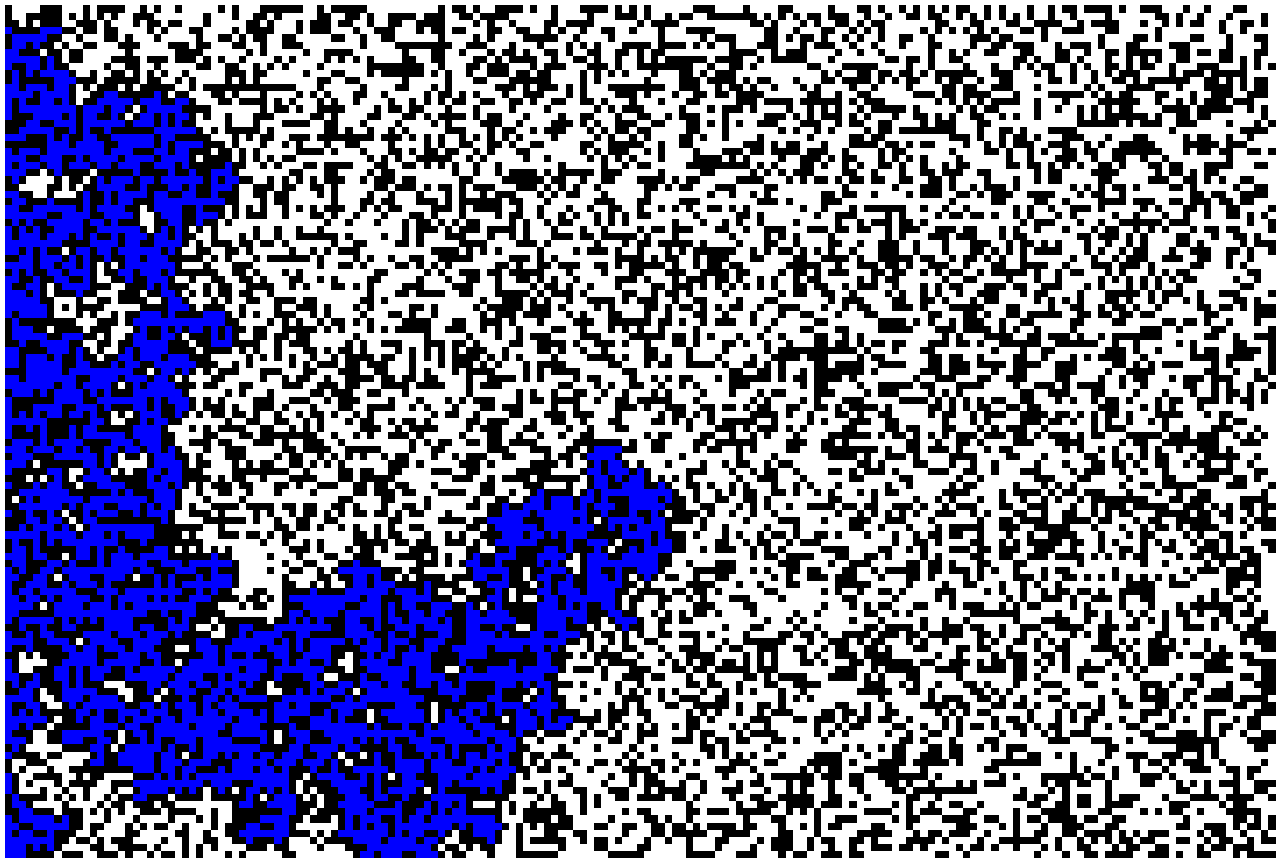
Simulation

Wir waehlen $p = 0,56$:



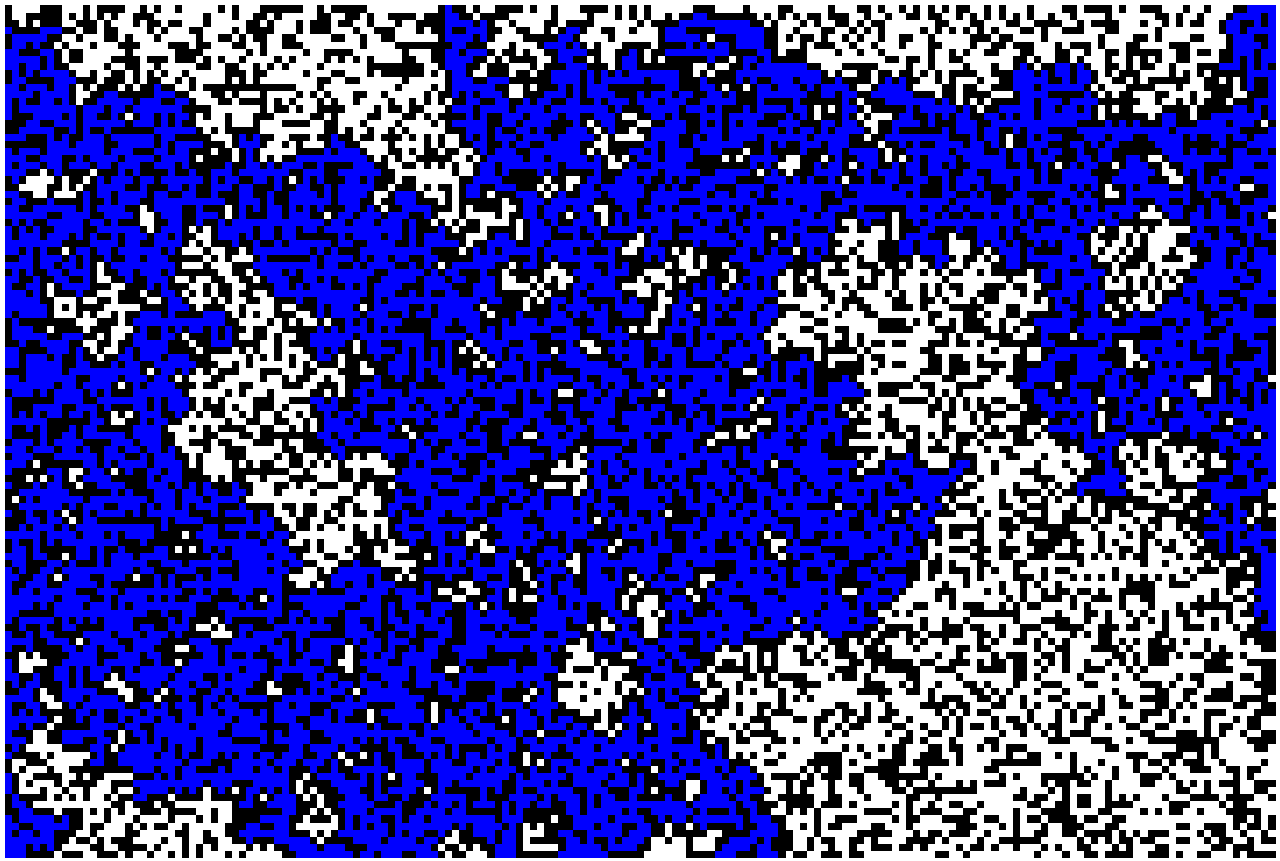
Simulation

Wir waehlen $p = 0,58$:



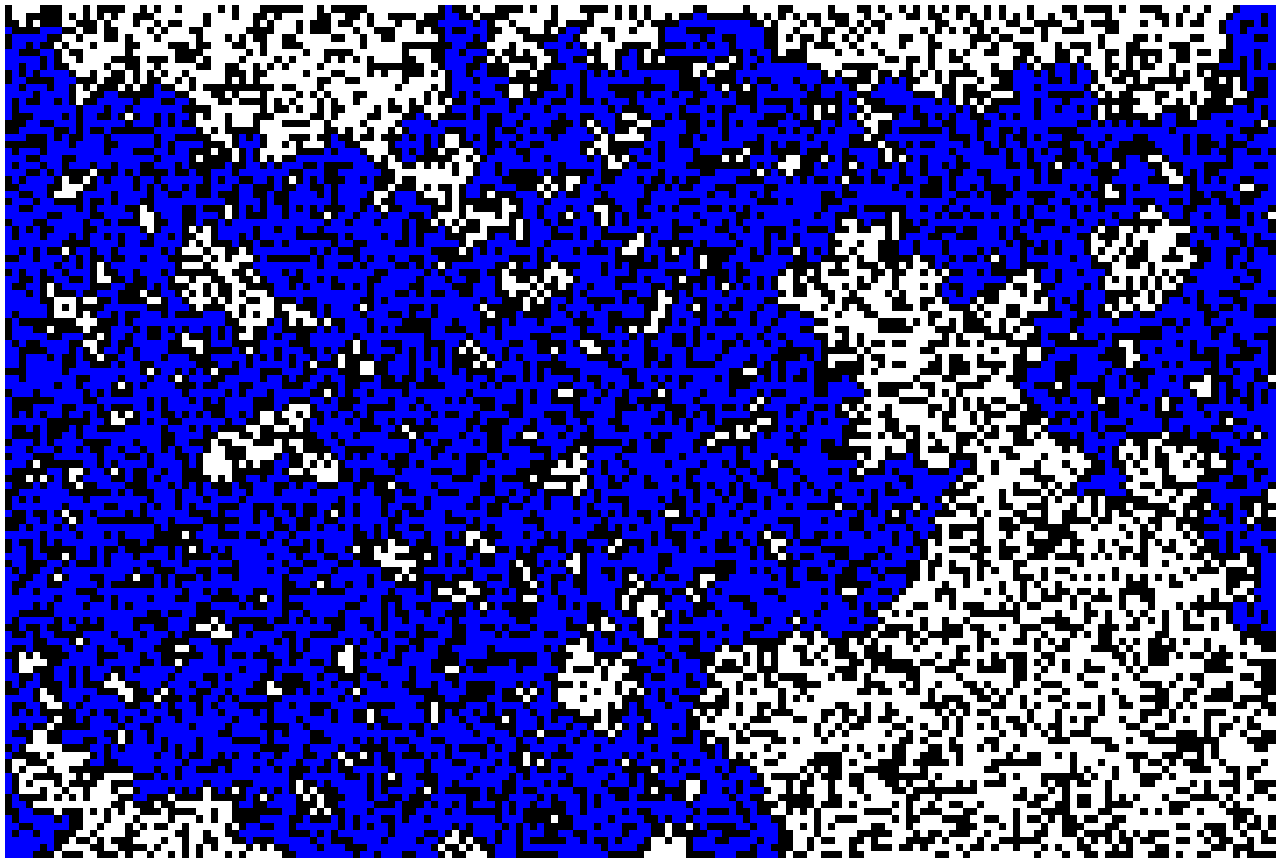
Simulation

Wir waehlen $p = 0,59$:



Simulation

Wir waehlen $p = 0,6$:



1. Grundlagen
2. Vielfalt der Stochastik
3. Statistik
   - Problemstellung
4. Wahrscheinlichkeitstheorie
5. Bernoulliperkolation
   - Fragestellung
   - Beschreibung des Modells
   - Simulation ohne Kopplung
   - Aussage und Beweisskizze
   - Simulation mit Kopplung
6. Ende

Literatur:

- Elementare Stochastik (lecture notes 2000)
  von Anton Wakolbinger
  ismi.math.uni-frankfurt.de/wakolbinger/lecturenotes/ElStoch00.pdf
- Elementare Stochastik (Mathematik kompakt)
  von Goetz Kersting und Anton Wakolbinger
- Streifzuege durch die Wahrscheinlichkeitstheorie (Springer-Lehrbuch)
  von Olle Haeggstroem
- Stochastik: Einfuehrung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (de Gruyter Lehrbuch)
  von Hans-Otto Georgii

Vielen Dank fuer Ihre Aufmersamkeit.