Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2014/15

Daniel Rost
Lukas-Fabian Moser

Lineare Algebra und analytische Geometrie I
8. Zentralübungsblatt

Man kreuze richtig an:

1) Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sowie $W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann ist $U + W = \ldots$

   a) $\{0\}$ b) U c) W d) $\mathbb{R}^2$

2) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie $W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^3$. Welches $v \in \mathbb{R}^3$ ist ein Element von $U + W$?

   a) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ d) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Sei $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Untervektorräumen $U, W \subset V$. Wenn man nun (analog zu $U + W$) definieren würde

$$U - W := \{u - w \mid u \in U,\ w \in W\},$$

   so wäre stets $U - W \ldots$

   a) $= \emptyset$ b) $= \{0_V\}$ c) $= U + W$ d) $\subset U$

4) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_r \in V$. Was ist die korrekte (oder äquivalent zur korrekten) Definition von $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$?

   a) $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}$
   b) $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \{\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}$
   c) $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}, v_1, \ldots, v_r \in V\}$
   d) $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \{\lambda v_1 + \cdots + \lambda v_r \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   e) $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \mathbb{R}v_1 + \ldots + \mathbb{R}v_r$
   f) $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \{\lambda_1 v_1 - \ldots - \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}$

Aufgaben
Wir kennen hauptsächlich zwei mögliche Arten, einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ anzugeben:

- Als Menge von Linearkombinationen gegebener „erzeugender" Vektoren („in Parameterform", „explizit"):
$$U = \langle v_1, \dots, v_r \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}$$
mit fest vorgegebenen Vektoren $v_1, \dots, v_r$.
- Als Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems („durch Gleichungen", „implizit"):
$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$$
mit einer fest vorgegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{\text{irgendwas} \times n}$.

Auch eine Angabe der Art
$$U = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \ \wedge \ x_1 + x_3 = 0\}$$
gehört zu dieser Kategorie, denn sie ist nur eine andere Schreibweise für ein lineares Gleichungssystem.

1) Man beschreibe in Worten, wie man die eine Art der Darstellung in die andere Art übersetzen kann, und führe das jeweilige Verfahren durch für die Untervektorräume
$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\-3\\8\\6\end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^5$$
und
$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix}3 & 6 & -1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & -1 & 2 & 4\\ 3 & 6 & -1 & 4 & 4\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^5$$

2) Für die folgenden Aufgabenstellungen überlege man, ob sie jeweils leichter zu lösen sind, wenn der/die beteiligte(n) Untervektorräume $U, W \subset \mathbb{R}^n$ in *expliziter* oder in *impliziter* Form gegeben sind, und lege eine Übersichtstabelle zum Nachsehen an.

   - Feststellen, ob ein gegebener Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ in U enthalten ist.
   - Angeben möglichst vieler Vektoren, die in U enthalten sind.
   - Berechnen der Summe $U + W$ von Untervektorräumen.
   - Berechnen des Durchschnitts $U \cap W$ von Untervektorräumen.
   - Zeigen, daß $U \subset W$ gilt.

   Welches Problem ergibt sich bei der Aufgabenstellung „Überprüfe, ob $U = W$ ist"?