

Grundlagen der Mathematik I – 12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Binomialkoeffizienten).

- a) Man zeige: Sind $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$, und ist $0 \leq k \leq n$, so gilt $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \binom{m}{k} \frac{1}{m^k}$.

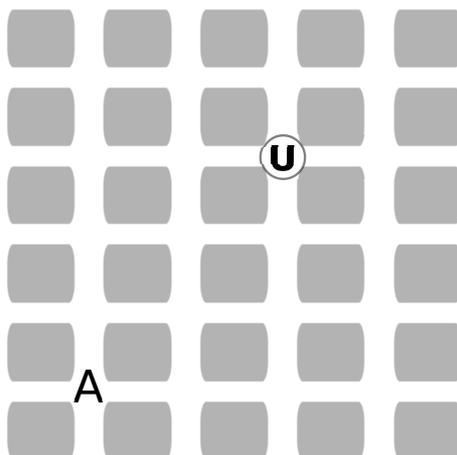
Es sei nun $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge, die durch $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ definiert ist.

- b) Man zeige: Sind $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$, so ist $a_n < a_m$.
(*Tip: Binomischer Lehrsatz!*)
- c) Man untersuche (mit dem Taschenrechner) das Verhalten der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für große Werte von n und beschreibe die gemachten Beobachtungen.

Aufgabe 2 (Kombinatorik I).

- a) Ein Paßwort soll aus vier bis sechs Zeichen bestehen; zwei von ihnen sollen verschiedene Buchstaben (ohne Umlaute, ohne Beachtung von Groß- und Kleinschreibung) sein, die übrigen Ziffern. Wieviele mögliche Paßwörter gibt es?
- b) Wie viele fünfstellige PIN-Nummern gibt es i) insgesamt, ii) mit lauter verschiedenen Ziffern, iii) mit genauer einer mehrfach auftretenden Ziffer, iv) mit zwei mehrfach auftretenden Ziffern?

Aufgabe 3 (Kombinatorik II). Ein Ausschnitt des New Yorker Stadtplans sieht folgendermaßen aus:



Frank steht an der Kreuzung A und möchte auf dem kürzesten Weg zur U-Bahnhaltestelle kommen.

- a) Wieviele verschiedene Wege kann Frank zur U-Bahn wählen, ohne einen Umweg zu machen?
- b) Wie lautet die Antwort in a), wenn Frank an einer anderen Kreuzung steht (etwa m Blocks westlich und n Blocks südlich von der U-Bahnstation, mit $n, m \in \mathbb{N}_0$)?

Aufgabe 4 (Permutationen). Es seien die folgenden Permutationen in S_7 gegeben:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\rho = (1\ 3\ 2\ 5) \circ (4\ 6\ 7).$$

- Man berechne alle Produkte von ρ , σ und τ mit zwei Faktoren sowie die Inversen ρ^{-1} , σ^{-1} und τ^{-1} .
- Man bestimme Permutationen $\pi, \psi \in S_7$ mit $\sigma \circ \pi = \tau$ und $\psi \circ \sigma = \tau$.
- Man stelle σ und τ als Produkt i) von Zyklen, ii) von Transpositionen dar.

Die Lösungen sind spätestens am **Freitag, 31. Januar 2014, 12 Uhr** im Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen.