Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – Wie man Zwischenkörper berechnen kann

Es sei $K \subset L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G. Wie kann man den Fixkörper L^H für eine Untergruppe $H \subset G$ konkret berechnen? Ich gebe einige Methoden an; Beispiele finden sich in der Lösungsskizze zu Aufgabe 2 von Blatt 12.

1. Möglichkeit: Sammeln und Gradvergleich. Man kennt den Grad von L^H über K, und zwar ist $[L^H : K] = [G : H]$. Man muß also nur genügend viele Elemente $a_1, \ldots, a_n \in L^H$ zusammensuchen, daß $[K(a_1, \ldots, a_n) : K] = [G : H]$ ist, und dann ist $L^H = K(a_1, \ldots, a_n)$.

2. Möglichkeit: Sammeln und Untergruppenvergleich. Man sucht so viele Elemente $a_1, \ldots, a_n \in L^H$, daß man von Hand nachprüfen kann: Ein Automorphismus $\sigma \in G$, der $a_1, \ldots, a_n$ fixiert, liegt bereits in H. Dann folgt $L^H = K(a_1, \ldots, a_n)$. (Denn nach Konstruktion fixiert jedes Element von H die a_i, also ist $\mathrm{Gal}(L/K(a_1, \ldots, a_n)) = H = \mathrm{Gal}(L/L^H)$, woraus die Behauptung folgt.)

3. Möglichkeit: Spurmethode. Wähle ein K-Erzeugendensystem (z.B. eine Basis) $b_1, \ldots, b_n$ von L. Definiere die H-*Spur* als Abbildung $\mathrm{Tr}_H : L \to L$, $x \mapsto \sum_{\sigma \in H} \sigma(x)$. **Falls $|H|$ kein Vielfaches der Charakteristik ist**, wird dann L^H (sogar als K-Vektorraum) erzeugt von $\mathrm{Tr}_H(b_1), \ldots, \mathrm{Tr}_H(b_n)$. (Denn Tr_H ist genau die Spur der Galoiserweiterung L/L^H; nach Vorlesung ist Tr_H K-linear mit Bild in L^H, und die Einschränkung auf L^H ist die Multiplikation mit $[L : L^H] = |H|$; also folgt $\mathrm{Tr}_H(L) = L^H$, falls $|H| \neq 0$ in K ist.)

4. Möglichkeit: Mit primitivem Element. Ist $a \in L$ ein primitives Element, d.h. $L = K(a)$, gilt $L^H = K(a_1, \ldots, a_n)$, wenn $a_1, \ldots, a_n$ die Koeffizienten des Polynoms $\prod_{\sigma \in H}(X - \sigma(a)) \in L[X]$ sind. (Für die Begründung siehe die Zusatzaufgabe von Blatt 12.)

5. Möglichkeit: Lineares Gleichungssystem. Wähle eine K-Basis $b_1, \ldots, b_n$ von L. Ein allgemeines Element $x \in L$ hat dann die Form $x = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ mit eindeutig bestimmten $a_1, \ldots, a_n \in K$. Man berechnet den allgemeinen Ausdruck für $\sigma(x)$ für alle $\sigma \in H$; die Bedingung $\sigma(x) = x$ für alle $\sigma \in H$ liefert dann ein lineares Gleichungssystem für die $a_1, \ldots, a_n$, das man explizit löst.

Wer noch andere Verfahren kennt, kann mir gerne einen Ergänzungsvorschlag zukommen lassen (persönlich oder per Mail).