Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – 7. Übungsblatt

Aufgabe 1. Bestimme die Minimalpolynome über $\mathbb{Q}$ von:

i) $\sqrt{a}$ und $\sqrt[3]{a}$, wobei $a \neq 0$ eine rationale Zahl ist. (Dabei meinen wir mit $\sqrt{a}$ wieder *irgendeine* komplexe Quadratwurzel, mit $\sqrt[3]{a}$ aber ausnahmsweise die *reelle* Kubikwurzel von a.)
ii) $\zeta_3 := \exp(2\pi/3 \cdot i)$.

Aufgabe 2. Zeige:

i) Jeder Körperhomomorphismus (:= Ringhomomorphismus zwischen Körpern) ist injektiv.
ii) Ist $K \subset L$ eine endliche Körpererweiterung, so ist jedes Element von L algebraisch über K.

Aufgabe 3. Zeige: Sind $K \subset L$ und $L \subset M$ endliche Körpererweiterungen, so ist auch $K \subset M$ endlich, und es gilt $[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$. (Das ist die *Gradformel* oder der *Gradsatz*. Tip: Beim Beweis der Formel beweist sich die Endlichkeit automatisch mit.)

Aufgabe 4. Es sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Zeige:

i) Sind $a, b \in L$ algebraisch über K, so ist $K \subset K(a, b)$ eine endliche Erweiterung. (Tip: Aufgabe 3.)
ii) Die über K algebraischen Elemente von L bilden einen Körper.
iii) Es sei $S \subset L$ eine Menge von über K algebraischen Elementen und $K \subset K(S) \subset L$ die von S erzeugte Erweiterung von K. Zeige: Jedes Element von $K(S)$ ist algebraisch über K.

Zusatzaufgabe. Bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$.

Die Lösungen sind bis **Dienstag, 8. Dezember 2009, 14 Uhr** *geheftet* im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und Tutoriumsgruppe $\in \{A, \ldots, G, Z, X\}$ angeben!