Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – 6. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es sei R ein Hauptidealring und $P \subset R$ ein Primideal. Zeige: Ist $P \neq 0$, so ist P ein maximales Ideal und R/P ein Körper.

Aufgabe 2. Für einen Integritätsring R bestimme die invertierbaren Elemente von $R[X]$.

Aufgabe 3. Zeige:

i) Die irreduziblen Polynome in $\mathbb{C}[X]$ sind genau die Polynome $aX + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.
ii) Für jedes $n \geqslant 1$ gibt es irreduzible Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ vom Grad n.

Aufgabe 4. Es sei $F = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom. Gibt es eine Primzahl p mit $p \nmid a_n$, so daß das Polynom $\overline{F} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} X^i \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ irreduzibel ist, so ist F irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$. (Das ist das berühmte *Reduktionskriterium*.)

Zusatzaufgabe. Ermittle alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$.

Die Lösungen sind bis **Dienstag, 1. Dezember 2009, 14 Uhr** im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und Tutoriumsgruppe $\in \{A, \ldots, G, Z, X\}$ angeben!