Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – Lösungsideen zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1. Im Wesentlichen ist nur die Wohldefiniertheit der Multiplikation zu überprüfen: sind $i, j \in I$, so liegt $(a+i)(b+j) - ab = ib + aj + ij$ in I, da I ein Ideal ist, und damit ist $(a+i)(b+j)+I = ab+I$. Die Gültigkeit aller Ringaxiome für R/I ererbt sich nun direkt von R; für die Assoziativität beispielsweise durch die Rechnung

$$\begin{aligned}(a+I)[(b+I)(c+I)] &= (a+I)(bc+I) = a(bc)+I = (ab)c+I \\ &= (ab+I)(c+I) = [(a+I)(b+I)](c+I).\end{aligned}$$

Die Verknüpfungen in R/I sind außerdem genau so gemacht, daß die kanonische Projektion ein Ringhomomorphismus wird.

Aufgabe 2. Man lasse G durch Konjugation auf sich selbst operieren; die Menge der Fixpunkte dieser Operation ist genau das Zentrum $\mathscr{Z}(G)$. Nach Vorlesung gilt dann $n := |\mathscr{Z}(G)| \equiv |G| \equiv 0 \pmod p$. Wegen $e \in \mathscr{Z}(G)$ ist aber $n \geqslant 1$, und damit folgt $n \geqslant p > 1$, d.h. $\mathscr{Z}(G) \neq \{e\}$.

Aufgabe 3. Nach Voraussetzung ist q Teiler von $|G|$ und Potenz einer Primzahl p; ist P eine Sylowsche p-Untergruppe von G, so gilt also $q \mid |P|$. Da es nun genügt, eine q-elementige Untergruppe von P zu finden, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß G eine p-Gruppe ist.
Nun beweisen wir die Aussage durch Induktion nach q, wobei der Fall $q = 1$ trivial ist. Im Fall $q > 1$ ist auch $|G| > 1$, und G besitzt einen Normalteiler N der Ordnung p (denn nach Aufgabe 2 ist $\mathscr{Z}(G)$ eine nichttriviale abelsche p-Gruppe; eine solche besitzt nach Vorlesung ein Element g der Ordnung p, und dann kann man $N := \langle g \rangle$ nehmen). Es genügt nun, eine q/p-elementige Untergruppe von G/N zu finden, und das geht nach Induktionsvoraussetzung (beachte, daß q/p ein Teiler von $|G/N| = |G|/p$ ist).

Aufgabe 4. H operiert von links auf G/H durch $(h, gH) \mapsto hgH$. Der Bahnensatz für diese Operation liefert eine Gleichung

$$p := |G/H| = \sum_{i=1}^{n} [H : H_{g_i H}]$$

für gewisse $g_1, \ldots, g_n \in G$. Da die linke Seite dieser Gleichung nach Voraussetzung der kleinste Primteiler von $|G|$ ist, und die Summanden auf der rechten Seite allesamt Teiler von G sind, muß $n = p$ oder $n = 1$ sein. Letzteres kann aber nicht sein, denn dann wäre die Operation transitiv, sie fixiert aber die Nebenklasse H. Also gibt es genau p Bahnen, d.h. die Operation ist trivial. Damit ist $hgH = gH$ für alle $h \in H$, $g \in G$, und das bedeutet $g^{-1}hg \in H$, d.h. H ist normal.

Zusatzaufgabe. Natürlich hat A_4 genau $4!/2 = 12$ Elemente. Angenommen, $G \subset A_4$ wäre eine Untergruppe mit 6 Elementen. Dann hätte G den Index 2 und wäre damit normal (nach Aufgabe 4 oder der Zusatzaufgabe von Blatt 3). Nach den Sylowschen Sätzen enthält G genau eine 3-elementige Untergruppe, also genau zwei Elemente der Ordnung 3. Eines von diesen ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Element $\sigma = (1\,2\,3)$, das andere dann notwendig $\sigma^2 = (1\,3\,2)$. Konjugieren wir aber σ mit dem Element $(1\,2)(3\,4) \in A_4$, so erhalten wir $(2\,1\,4) \notin G$. Also ist G nicht normal in A_4, Widerspruch.