Mathematatisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – Lösungsideen zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1. Laut Vorlesung sind die Untergruppen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau die Gruppen $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (also die von $\overline{d} = d + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ erzeugten Untergruppen) für $d \mid n$. Das liefert also:

i) Für $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ nur die „trivialen“ Untergruppen $7\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \{0\}$ und $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$,
ii) für $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ außer den trivialen Untergruppen $\{0\}$ und $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ auch noch $2\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$, $4\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$, $5\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ und $10\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$,
iii) für $\mathbb{Z}/729\mathbb{Z}$ wegen $729 = 3^6$ die sieben Untergruppen $3^i\mathbb{Z}/729\mathbb{Z}$ für $0 \leqslant i \leqslant 6$.

Aufgabe 2. Es sei $G = \langle g_0 \rangle$, $H = \langle h_0 \rangle$ mit $\operatorname{ord} g_0 = m = |G|$, $\operatorname{ord} h_0 = n = |H|$. Wir berechnen die Ordnung eines Elements $(g, h) \in G \times H$: eine Potenz $(g, h)^\ell = (g^\ell, h^\ell)$ ist genau dann trivial, wenn $g^\ell = e_G$, $h^\ell = e_H$ ist, wenn also ℓ gemeinsames Vielfaches von $\operatorname{ord} g$ und $\operatorname{ord} h$ ist. Daraus folgt $\operatorname{ord}(g, h) = \operatorname{kgV}(\operatorname{ord} g, \operatorname{ord} h)$. Insbesondere ist die ***größte*** Ordnung eines Elementes von $G \times H$ genau $\operatorname{ord}(g_0, h_0) = \operatorname{kgV}(m, n)$, denn es gilt ja $\operatorname{ord} g \mid \operatorname{ord} g_0$ und $\operatorname{ord} h \mid \operatorname{ord} h_0$ für alle $g \in G$, $h \in H$. Die Gruppe $G \times H$, deren Ordnung ja mn ist, ist also genau dann zyklisch, wenn $\operatorname{kgV}(m, n) = mn$ ist, und das ist gleichbedeutend mit $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$ ist.

Aufgabe 3.

i) Ist G auflösbar, so auch H. Denn ist $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \ldots \lhd G_n = G$ eine Normalreihe mit abelschen Quotienten, so setze $H_i := G_i \cap H$. Dann rechnet man nach, daß auch $\{e\} = H_0 \subset \cdots \subset H_n = H$ eine Normalreihe ist, und da die Inklusion $H_i \hookrightarrow G_i$ eine Inklusion von H_i/H_{i-1} in die (abelsche) Gruppe G_i/G_{i-1} induziert, sind die Quotienten auch abelsch. (Hier haben wir nicht benötigt, daß H ein Normalteiler in G ist.)
ii) Ist G auflösbar, so auch G/H. Sei nämlich $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \ldots \lhd G_n = G$ eine Normalreihe mit abelschen Quotienten und $\pi : G \to G/H$ die kanonische Projektion. Ich behaupte, daß $\{e_{G/H}\} = \pi(G_0) \subset \cdots \subset \pi(G_n) = G/H$ eine Normalreihe mit abelschen Quotienten ist. Die Normalteilereigenschaft ist nur nachzurechnen; für die Quotienten beachte, daß die Abbildung $G_i/G_{i-1} \to \pi(G_i)/\pi(G_{i+1})$ ein wohldefinierter surjektiver Homomorphismus ist, also ist mit der linken auch die rechte Gruppe abelsch.
iii) Sind H und G/H auflösbar, so auch G: Eine Normalreihe mit abelschen Quotienten für G/H liefert (durch Zurückziehen entlang der kanonischen Projektion) eine mit H beginnende Normalreihe mit abelschen Quotienten in G, die man an eine Normalreihe für H anfügen kann, um eine Normalreihe für G zu bekommen.

Aufgabe 4. S_2 ist zweielementig, also abelsch und damit auflösbar (ist G eine abelsche Gruppe, so ist $\{e\} \subset G$ eine Normalreihe mit abelschen Quotienten!). In S_3 kennen wir den Normalteiler A_3, der dreielementig und damit ebenfalls abelsch ist. Damit ist $\{\mathrm{id}\} \subset A_3 \subset S_3$ eine Normalreihe mit abelschen Quotienten (denn S_3/A_3 ist ja zweielementig und damit wieder abelsch).

Zusatzaufgabe.

i) Die (Links- oder Rechts-) Nebenklassen einer Untergruppe bilden eine disjunkte Zerlegung der Gruppe. Ist $H \subset G$ Untergruppe vom Index 2, so gibt es genau zwei Nebenklassen; da die eine Nebenklasse immer H selbst ist, muß die andere $G \setminus H$ sein. Das bedeutet für $g \notin H$, daß $gH = G \setminus H = Hg$ ist; für $g \in H$ ist dagegen $gH = H = Hg$, also ist H ein Normalteiler.

ii) Eine Beziehung zwischen G und $\mathrm{Aut}(G)$ (womit wir jetzt die Gruppe der Gruppenautomorphismen von G meinen) ist durch die Konjugationsoperation gegeben: für $g \in G$ ist $\varphi_g : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$, ein Element von $\mathrm{Aut}(G)$, und $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto \varphi_g$, ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathscr{Z}(G)$. Ist nun $\mathrm{Aut}(G)$ zyklisch, so auch jede Untergruppe, insbesondere $\varphi(G) \cong G/\mathscr{Z}(G)$. Wir müssen also nur zeigen: ist $G/\mathscr{Z}(G)$ zyklisch, so ist G abelsch. Sei dazu $a \in G$ Urbild eines Erzeugers von $G/\mathscr{Z}(G)$. Dann hat jedes Element von G die Form $a^k \cdot z$ für gewisse $k \geqslant 0$ und $z \in \mathscr{Z}(G)$, aber solche Elemente kommutieren offensichtlich miteinander (und de facto folgt, daß $G/\mathscr{Z}(G)$ die triviale Gruppe ist).