Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – Lösungsideen zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1.

i) Wegen $\varphi(e_G) = e_H$ folgt $\{e_G\} \subset \varphi^{-1}(e_H) = \ker \varphi$. Ist φ injektiv, so sind alle Fasern höchstens einelementig, also folgt sogar Gleichheit. – Ist umgekehrt $\ker \varphi = \{e_G\}$, so folgt aus $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ wegen $\varphi(g_1^{-1}g_2) = e_H$ bereits $g_1^{-1}g_2 = e_G$, also $g_1 = g_2$, d.h. φ ist injektiv.
ii) Natürlich ist $e_G \in \varphi^{-1}(H')$. Sind aber $g_1, g_2 \in \varphi^{-1}(H')$, also $\varphi(g_1), \varphi(g_2) \in H'$, so folgt $\varphi(g_1^{-1}g_2) = \varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2) \in H'$, also $g_1^{-1}g_2 \in \varphi^{-1}(H')$, und damit ist $\varphi^{-1}(H')$ eine Untergruppe. Ist H' sogar normal, so liegt für $g \in \varphi^{-1}(H')$ und beliebiges $g_0 \in G$ auch $\varphi(g_0 g g_0^{-1}) = \varphi(g_0)\varphi(g)\varphi(g_0)^{-1}$ in H', also folgt $g_0 g g_0^{-1} \in \varphi^{-1}(H')$, d.h. $\varphi^{-1}(H')$ ist auch normal.

Aufgabe 2. Sind $g, h \in N_G(S)$, so folgt zunächst $g^{-1}Sg = g^{-1}(gSg^{-1})g = (g^{-1}g)S(g^{-1}g) = S$, also $g^{-1} \in N_G(S)$, und außerdem $ghS(gh)^{-1} = g(hSh^{-1})g^{-1} = gSg^{-1} = S$, d.h. $gh \in N_G(S)$. (Wer dem forschen Rechnen mit Mengen nicht traut, kann sich auch einzelne Elemente vornehmen.)

Aufgabe 3. Jedes Bild einer Untergruppe unter einem Gruppenhomomorphismus ist eine Untergruppe, also ist die Abbildung wohldefiniert. Ist umgekehrt $U \subset G/N$ eine Untergruppe, so ist $\pi^{-1}(U) \subset G$ eine Untergruppe (nach Aufgabe 1 (ii)), die $\pi^{-1}(\{e_{G/N}\}) = N$ enthält. Dies liefert also eine wohldefinierte Abbildung in die andere Richtung.
Beide Konstruktionen sind invers: denn für jede Untergruppe $H \subset G$ rechnet man schnell nach, daß $\pi^{-1}(\pi(H)) = HN$ ist, und im Fall $N \subset H$ ist das einfach H. Umgekehrt ist $\pi(\pi^{-1}(U)) = U$ sogar für jede *Teilmenge* $U \subset G/N$, denn π ist ja surjektiv.
Ist nun $U \subset G/N$ sogar ein Normalteiler, so auch $\pi^{-1}(U)$ nach Aufgabe 2 (ii); und schließlich gilt folgendes Lemma: ist $\pi : G \to G'$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, so ist $\pi(H)$ normal für jeden Normalteiler $H \subset G$. Denn jedes $g' \in G'$ kommt von einem $g \in G$, und dann ist $g'\pi(H)g'^{-1} = \pi(gHg^{-1}) = \pi(H)$.

Aufgabe 4. Betrachte den Gruppenhomomorphismus $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$. Sein Kern $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist ein Normalteiler von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, der für $n \geqslant 2$ sicher nichttrivial und auch nicht abelsch ist.
Ein abelscher nichttrivialer Normalteiler ist beispieslweise die Menge $\{aE_n \mid a \in \mathbb{R}^\times\}$ aller Vielfachen der Einheitsmatrix. Sie ist sicher eine nichttriviale Untergruppe, und da aE_n sogar *zentral* ist (d.h. mit jedem Element von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vertauscht), ist sie automatisch ein Normalteiler.

Zusatzaufgabe.

i) Es sei U eine n-elementige Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$. Dann gilt $z^n = 1$ für alle $z \in U$ nach Euler–Fermat, also $U \subset \mu_n(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Aber beide Mengen haben genau n Elemente, also sind sie gleich. Das heißt: Für jedes n ist die Gruppe μ_n der n-ten Einheitswurzeln die einzige n-elementige Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$.

ii) Überraschenderweise sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ als additive Gruppen tatsächlich isomorph. Der Trick ist zu zeigen, daß $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sogar als $\mathbb{Q}$-Vektorräume isomorph sind. Sei also $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$. (A ist notwendig unendlich, denn sonst wäre $\mathbb{R}$ abzählbar.)

Dann bilden alle x_α und ix_α zusammen eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{C}$, die also indiziert wird durch die Menge $\{1, i\} \times A$. Um einen Isomorphismus $\mathbb{R} \cong \mathbb{C}$ von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen anzugeben, genügt es damit, eine Bijektion $A \cong \{1, i\} \times A$ zu finden.

Das geht für jede unendliche Menge A: falls $A \cong \mathbb{N}$, so ist das einfach; im allgemeinen Fall kann man verwenden, daß jede unendliche Menge sich zerlegen läßt als $A \cong A' \times \mathbb{N}$ mit einer gewissen Menge A' (Bosch, Algebra, 7.1, Lemma 7).