

Algebra – Lösungsideen zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1. Da gibt es viele Möglichkeiten. Eine Gruppe mit n Elementen ist zum Beispiel $\mathbb{Z}/(n)$, deren Konstruktion man in Vorlesungen des ersten Semesters nachschlagen kann. Noch eleganter ist es, die Gruppe $\mu_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ (mit der Multiplikation als Verknüpfung) hinzuschreiben: mit der Polarform komplexer Zahlen kann man sehen, daß μ_n tatsächlich n Elemente hat (und daß sogar $(\mu_n, \cdot) \cong (\mathbb{Z}/(n), +)$ gilt).

Konkret liefert das für $n = 2$ die Gruppe $\mu_2 = \{\pm 1\}$, $\mu_4 = \{\pm i, \pm 1\}$ und (etwas komplizierter) $\mu_3 = \{1, \zeta, \zeta^2\}$ mit $\zeta = \exp(2\pi i/3)$. Eine weitere vierelementige Gruppe ist übrigens $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, und das ist tatsächlich ein strukturell anderes Beispiel.

Den „brutalstmöglichen“ Weg über die Konstruktion einer Gruppentafel führe ich nur für $n = 3$ vor. Für eine dreielementige Gruppe benötigt man ein neutrales Element 1 und zwei weitere Elemente a, b . Nach Definition des neutralen Elements können wir die Multiplikationstafel also schon so weit ausfüllen:

\cdot	1	a	b
1	1	a	b
a	a		
b	b		

Um weiterzumachen, müssen wir eine Festlegung für $a \cdot a = a^2$ treffen. In jeder Zeile und jeder Spalte der Tabelle muß jedes Gruppenelement genau einmal vorkommen (denn in einer Gruppe haben die Gleichungen $rx = s$ und $yr = s$ die eindeutig bestimmten Lösungen $x = r^{-1}s$ und $y = sr^{-1}$). Damit kann nur noch $a^2 = 1$ oder $a^2 = b$ sein. Probieren wir $a^2 = 1$: dann bleibt in der zweiten Zeile nur noch die Möglichkeit $ab = b$, aber in einer Gruppe folgt daraus $a = 1$, das kann nicht sein. Also muß $a^2 = b$ sein, und dann gibt es keine andere Möglichkeit mehr als

\cdot	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

Nun haben wir eine Verknüpfung auf der Menge $\{1, a, b\}$ definiert, aber es ist noch nicht klar, daß das tatsächlich eine Gruppe ist – jetzt beginnt erst der mühsame Teil. Die Existenz der neutralen Elements (bei uns 1) ist klar, und die Existenz von Inversen kann man auch schnell überprüfen. Das Problem ist die Assoziativität. Für alle $x, y, z \in \{1, a, b\}$ müssen wir überprüfen, ob $x(yz) = (xy)z$ ist.

Am geschicktesten ist wohl, sich zuerst klarzumachen, daß diese Gleichung sicher dann erfüllt ist, wenn x, y oder z gleich 1 ist. Also können wir uns auf $x, y, z \in \{a, b\}$ beschränken. Dafür gibt es 8 mögliche Kombinationen, die man schnell durchprobieren kann.

Natürlich sind hier noch Optimierungen denkbar, aber man sieht: zur Konstruktion neuer Gruppen ist dieses Verfahren viel zu mühsam. (Man kann auf diese Art aber ziemlich schnell einsehen, daß es nur einen einzigen „Typ“ von Gruppentafeln einer dreielementigen bzw. nur zwei verschiedene „Typen“ von Gruppentafeln von vierelementigen Gruppen gibt.)

Aufgabe 2. Muß ich nicht lösen können.

Aufgabe 3. Es sei f die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ und g die Funktion $x \mapsto 1 - x$. Dann kann man nachrechnen, daß

$$U = \{\text{id}, f, g, fg, gf, fgf = fgf\}$$

ist.

Da f, g bijektiv sind (es ist sogar $f^2 = g^2 = \text{id}$), ist U damit eine Teilmenge der von f und g erzeugten Untergruppe H von $\text{Aut}(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$ (Bezeichnung von Aufgabe 4). Ich behaupte $U = H$ (und insbesondere ist U eine Gruppe).

Wegen $f^2 = g^2 = \text{id}$ besteht H nur aus Wörtern der Form $fgfg \dots fg$ (die auch mit g beginnen oder mit f enden dürfen). Wegen $fgf = gfg$ kann man aber jedes Wort der Länge ≥ 4 verkürzen! (Beispiel: $fgfg = ffgf = gf$ usw.) Also bleiben nur Wörter der Länge ≤ 3 übrig, und die liegen alle in U .

Aufgabe 4.

- i) Da ist fast nichts mehr zu zeigen: die Assoziativität der Komposition von Abbildungen ist aus den ersten Semestern bekannt, ebenso, daß die Komposition zweier bijektiver Abbildungen und die Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung wieder bijektiv sind.
- ii) Enthält X drei verschiedene Elemente x, y, z , so kann man beispielsweise folgende Elemente von $\text{Aut } X$ konstruieren: $\sigma : X \rightarrow X$ sei die Abbildung, die x und y vertauscht und alle anderen Elemente unverändert läßt; $\tau : X \rightarrow X$ die Abbildung, die nur y und z vertauscht. Dann ist $\sigma \circ \tau(x) = y$ und $\tau \circ \sigma(x) = z$, also $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

Zusatzaufgabe.

- i) Nein! Beispielsweise folgt in $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ aus $x^2 = 1$ bereits $x = 1$, während in $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ sowohl $x = 1$ als auch $x = -1$ Lösungen dieser Gleichung sind. (Man überlege sich, was diese Argumentation genau mit dem Begriff der „Isomorphie“ von Gruppen zu tun hat.)
Eine andere, natürlich im Wesentlichen äquivalente Idee: ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\times$ ein Homomorphismus von Gruppen, so muß $f(x) = f(2 \cdot x/2) = f(x/2)^2 > 0$ sein für alle x , also ist f niemals surjektiv.
- ii) Ja, denn die aus Schule und Analysis bekannte Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto \exp x$ ist bijektiv und wegen $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ ein Gruppenhomomorphismus.