Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – 13. Übungsblatt

Aufgabe 1.

i) Bestimme den Grad des Zerfällungskörpers sowie den Isomorphietyp der Galoisgruppe des Polynoms $X^3 - 3X - 3$ über $\mathbb{Q}$.
ii) Dasselbe für $X^4 - X^2 - 3$ über $\mathbb{F}_5$.

Aufgabe 2. Beweise die folgenden Formeln für die Kreisteilungspolynome $\Phi_n \in \mathbb{Q}[X]$ aus der Vorlesung:

i) Für jedes $n \geqslant 1$ ist $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$. Folgere, daß $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ gilt.
ii) Für jede Primzahl p und jedes $n \geqslant 1$ gilt

$$\Phi_{pn}(X) = \begin{cases} \Phi_n(X^p) & \text{falls } p \mid n, \\ \dfrac{\Phi_n(X^p)}{\Phi_n(X)} & \text{falls } p \nmid n. \end{cases}$$

(Tip: Zeige zuerst $\Phi_{pn} \mid \Phi_n(X^p)$ und, falls $p \nmid n$, auch $\Phi_n \mid \Phi_n(X^p)$.)
iii) Berechne Φ_5, Φ_{12} und Φ_{15}.

Aufgabe 3. Es sei K ein Körper mit algebraischem Abschluß $\overline{K}$ und $K \subset L \subset \overline{K}$ ein über K endlicher Zwischenkörper. Es seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ alle K-Homomorphismen $L \to \overline{K}$ und $L_i := \sigma_i(L)$. Setze $M := L_1 L_2 \ldots L_n$ (der von allen L_i zusammen erzeugte Unterkörper von $\overline{K}$). Zeige:

i) $L \subset M$, und M/K ist endlich und normal.
ii) Ist $K \subset M' \subset \overline{K}$ ein weiterer Zwischenkörper mit $L \subset M'$ und M'/K endlich und normal, so folgt $M \subset M'$.
iii) Ist L/K separabel, so ist M/K galoissch.
iv) Ist $a \in L$ ein primitives Element von L/K mit Minimalpolynom $f \in K[X]$, so ist M Zerfällungskörper von f über K (sogar über L).

(Man nennt M den *normalen Abschluß* von L/K. Die Moral dieser Aufgabe ist insbesondere: Jede endliche separable Erweiterung kann aufgeblasen werden zu einer Galoiserweiterung, und unter diesen Aufblähungen gibt es eine kleinste.)

Aufgabe 4. Zeige: Ist $p = 0$ oder eine Primzahl, und ist $n \geqslant 1$ beliebig, so gibt es eine endliche Galoiserweiterung $K \subset L$ in Charakteristik p mit $\mathrm{Gal}(L/K) \cong S_n$. (Hinweis: Satz von Artin, das ist IV.1.6 in der Vorlesung.)

Zusatzaufgabe. In dieser Aufgabe geht es um einen anderen Beweis von Satz IV.3.7 aus der Vorlesung (E. Landau, 1928). Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel und $f \in \mathbb{Q}[X]$ ihr Minimalpolynom, $s = \deg f$. Es sei r eine zu n teilerfremde Zahl. Zeige, daß auch ζ^r eine Nullstelle von f ist, und zwar in folgenden Schritten:

i) Für alle $d \in \mathbb{Z}$ gibt es ein eindeutiges Polynom $g_d \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad $< s$ mit $f(\zeta^d) = g(\zeta)$, und g hängt nur von $\overline{d} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ab.
ii) Ist p eine Primzahl, so sind die Koeffizienten von g_p durch p teilbar.
iii) Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: Ist p eine Primzahl und größer als N, so ist $g_p = 0$.
iv) Es gibt ein $r' \in \mathbb{Z}$ mit $n \mid r - r'$, so daß alle Primfaktoren von r' größer als N sind.
v) Es ist $f(\zeta^r) = 0$.

Folgere nun, daß *alle* primitiven n-ten Einheitswurzeln Nullstellen von f sind, und $\deg f = \varphi(n)$.

Die Lösungen sind bis **Dienstag, 2. Februar 2009, 14 Uhr** *geheftet* im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und Tutoriumsgruppe $\in \{A, \ldots, G, Z, X\}$ angeben!