Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – 12. Übungsblatt

Aufgabe 1. Es sei $L = \mathbb{Q}(\zeta_3)$, wobei wie üblich $\zeta_3 := e^{2\pi i/3}$ gesetzt wird.

i) Zeige, daß $L/\mathbb{Q}$ galoissch ist.
ii) Berechne die Galoisgruppe von $L/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. Es sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 3$ über $\mathbb{Q}$. Bestimme alle Zwischenkörper der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ (durch Angabe von erzeugenden Elementen).

Aufgabe 3. Es sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$. Berechne die Galoisgruppe von $L/\mathbb{Q}$ und alle Zwischenkörper dieser Erweiterung.

Aufgabe 4. Es sei $K \subset M$ eine algebraische Erweiterung mit Zwischenkörpern L und L', und es sei LL' das Kompositum von L und L' (vgl. Aufgabe 2 von Blatt 8). Zeige: Ist L/K endlich und galoissch, so gilt:

i) Auch LL'/L' ist endlich und galoissch.
ii) Durch $\rho : \mathrm{Gal}(LL'/L') \to \mathrm{Gal}(L/L \cap L')$, $\sigma \mapsto \sigma|_L$, ist ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus gegeben. (Insbesondere kann man $\mathrm{Gal}(LL'/L')$ als Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L/K)$ auffassen.)

(Hinweis für den Beweis der Surjektivität in ii): Berechne den Fixkörper des Bildes von ρ und verwende den Hauptsatz der Galoistheorie.)

Zusatzaufgabe. Ein nützlicher Satz zur Berechnung von Fixkörpern: Es sei $K \subset M = K(a)$ eine endliche Galoiserweiterung und $H \subset \mathrm{Gal}(M/K)$ eine beliebige Untergruppe. Zeige: M^H wird über K erzeugt von den Koeffizienten des Polynoms $\prod_{\sigma \in H}(X - \sigma(a))$.

Die Lösungen sind bis **Dienstag, 26. Januar 2009, 14 Uhr** *geheftet* im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und Tutoriumsgruppe $\in \{A, \ldots, G, Z, X\}$ angeben!