Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

Algebra – Lösungsideen zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1. Am einfachsten geht das mit dem Satz vom primitiven Element: Es gibt $a \in L$ mit $L = K(a)$. Sei $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von a. Ein Homomorphismus $K(a) \to \overline{K}$ ist dann genau dadurch gegeben, daß a auf eine beliebige Nullstelle von f in $\overline{K}$ abgebildet wird (das liegt an der Isomorphie $K(a) \cong K[X]/(f)$) – und davon gibt's genau $\deg f = [L : K]$ verschiedene, da f ja separabel ist.
Alternativ kann man auch die Sätze aus der Vorlesung über die Anzahl von Fortsetzungen von Homomorphismen verwenden (bzw. ihre Beweise anpassen von „es gibt einen genügend großen Oberkörper …“ zu „der algebraische Abschluß von K tut's“).

Aufgabe 2.

i) Nimm ein $a \in L$, das nicht in K liegt. Dann muß $L = K(a)$ sein (es gibt aus Gradgründen keine echten Zwischenkörper). Das Minimalpolynom von a hat Grad 2 und eine Nullstelle in L, zerfällt also in Linearfaktoren $f = (X - a)(X - a')$ (durch Ausdividieren des einen Linearfaktors erhält man einen anderen). Also ist L Zerfällungskörper von f über K und damit normal.
ii) Mit den Bezeichnungen aus i) ist f separabel (denn ein inseparables irreduzibles Polynom hätte durch die Charakteristik teilbaren Grad). Also ist a separabel über K, und damit auch $K(a) = L$. – Wie üblich ist nun ein K-Automorphismus $L \to L$ genau dadurch gegeben, daß man a auf eine Nullstelle von f abbildet, und da bleiben nur a und a'. Neben der Identität ist der einzige andere Automorphismus also gegeben durch $a \mapsto a'$, d.h. $u + av \mapsto u + a'v$ für $u, v \in K$. (Insbesondere ist die Galoisgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, aber das ist von vornherein klar, weil sie $[L : K] = 2$ Elemente haben muß und es keine andere zweielementige Gruppe gibt.)
iii) Es kann nur die Separabilität scheitern; wir brauchen also einen unendlichen Körper der Charakteristik 2, und das einfachste Beispiel ist wie immer $K = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(T)$, der Quotientenkörper des Polynomrings $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[T]$. Sei nun $L = K(\sqrt{T})$. Dann erhalten wir eine Erweiterung vom Grad 2, aber das Minimalpolynom von $\sqrt{T}$ ist $X^2 - T = (X - \sqrt{T})^2$, das inseparabel ist.

Aufgabe 3. K_s/K ist sicherlich separabel, so daß nur Normalität zu zeigen ist. Sei also $a \in K_s$ mit Minimalpolynom $f \in K[X]$. Wir müssen zeigen, daß f über K_s zerfällt. Aber f zerfällt sicher über $\overline{K}$, und alle Nullstellen sind separabel über K – denn sie haben ja das gleiche Minimalpolynom wie a, nämlich f. Also liegen sie in K_s, und das zeigt die Behauptung.

Aufgabe 4.

i) Es ist zu zeigen, daß $\overline{L}$ algebraisch abgeschlossen und algebraisch über K ist. Ersteres ist klar nach Definition, zweiteres folgt daraus, daß die Komposition algebraischer Erweiterungen wieder algebraisch ist.
ii) Habe ich schon in der Lösung zu Aufgabe 7 von Blatt 10 gezeigt.

Zusatzaufgabe. Die Voraussetzung kann man auch so formulieren: Für alle $a \in L$ ist $[K(a) : K] \leqslant n$. Da aber jeder über K endliche Zwischenkörper von L/K nach dem Satz vom primitiven Element die Form $K(a)$ für ein $a \in L$ hat, folgt: Jeder über K endliche Zwischenkörper von L/K hat Grad $\leqslant n$ über K.
Daraus folgt nun die Behauptung, etwa so: Sei $K \subset M \subset L$ ein endlicher Zwischenkörper von maximalem Grad über K (so einen gibt's, weil nur Grade $\leqslant n$ vorkommen). Wir sind fertig, wenn wir $L = M$ zeigen. Gäbe es aber $a \in L$, $a \notin M$, so wäre $M(a)$ ein echt größerer, immer noch endlicher Zwischenkörper der Erweiterung, Widerspruch.
(Im wesentlichen haben wir damit gezeigt: Eine unendliche algebraische Erweiterung besitzt Zwischenkörper von beliebig großem endlichem Grad.)