Mathematisches Institut der Universität München
Wintersemester 2009/10

Stefan Gille
Lukas-Fabian Moser

# Algebra – 10. Übungsblatt

**Aufgabe 1.** Es sei $K$ ein Körper der Charakteristik $\notin \{2,3\}$, $d \in K$ kein Quadrat und $e \in K$ kein Kubus (d.h. es gibt kein $a \in K$ mit $e = a^3$). Es sei $L = K(\sqrt{d})$ und $F = K(\sqrt[3]{e})$.

i) Berechne $\mathrm{Tr}_{L/K}(a + b\sqrt{d})$ und $N_{L/K}(a + b\sqrt{d})$ für $a, b \in K$.
ii) Berechne $\mathrm{Tr}_{F/K}(a + b\sqrt[3]{e} + c\sqrt[3]{e}^2)$ und $N_{F/K}(a + b\sqrt[3]{e} + c\sqrt[3]{e}^2)$ für $a, b, c \in K$.

**Aufgabe 2.** Es sei $f = T^3 + T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$.

i) Zeige: $f$ ist irreduzibel.
ii) Es sei $L := \mathbb{Q}[T]/f\mathbb{Q}[T]$ und $x := \overline{T} \in L$. Berechne $\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(1 + x^2)$ und $N_{L/\mathbb{Q}}(1 + x^2)$.

**Aufgabe 3.** Zeige: Ist $K$ ein vollkommener Körper und $L/K$ eine algebraische Erweiterung, so ist auch $L$ vollkommen.

**Aufgabe 4.** Es sei $p$ eine Primzahl und $K$ ein Körper mit $p^n$ Elementen. Es sei $P \subset K$ der Primkörper und $f \in P[T]$ normiert und irreduzibel vom Grad $m$. Zeige: Ist $a \in K$ eine Nullstelle von $f$, so gilt

$$f = \prod_{i=0}^{m-1} (T - a^{p^i}).$$

**Aufgabe 5.** Es sei $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe.

i) Zeige: Sind $a_1, \ldots, a_k \in G$ mit paarweise teilerfremden (endlichen) Ordnungen, so gilt $\mathrm{ord}\left(\prod_{i=1}^k a_i\right) = \prod_{i=1}^k \mathrm{ord}(a_i)$.
ii) Es sei $|G| = n = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$, wobei die $p_i$ paarweise verschiedene Primzahlen seien. Zeige: Gibt es für jedes $i$ ein Element der Ordnung $p_i^{n_i}$ in $G$, so ist $G$ zyklisch. (Hinweis: Teil i) oder die Sylowschen Sätze.)

**Aufgabe 6.** Zeige, daß $K := \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/d\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ ein Körper ist und bestimme den Primkörper $P$ sowie $[K : P]$ für:

i) $d = 3$
ii) $d = 1 + i$
iii) $d = 2 + i$

**Aufgabe 7.** Es sei $L/K$ eine endliche, separable, normale Körpererweiterung. Es sei $\mathrm{Aut}(L/K)$ die Menge der $K$-Homomorphismen $L \to L$. Zeige:

i) $|\mathrm{Aut}(L/K)| = [L : K]$.
ii) Für jedes $x \in L$ ist $N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)} \sigma(x)$ und $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)} \sigma(x)$.

**Aufgabe 8.** Es sei $K$ ein Körper, $K \subset L$ eine separable, $K \subset F$ eine inseparable und $K \subset M$ eine rein inseparable Erweiterung (natürlich alle algebraisch).

i) Kann es in dieser Situation einen $K$-Homomorphismus $F \to L$ geben?
ii) Kann es in dieser Situation einen $K$-Homomorphismus $L \to F$ geben?
iii) Was ändert sich in i) und ii), wenn man $F$ durch $M$ ersetzt?

Wir wünschen allen Studenten frohe Weihnachten, gute Erholung
und ein glückliches neues Jahr!

Die Lösungen sind bis **Dienstag, 12. Januar 2009, 14 Uhr** *geheftet* im Algebra-Übungskasten (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte Namen und Tutoriumsgruppe $\in \{A, \ldots, G, Z, X\}$ angeben!