

Grundlagen der Mathematik II – 4. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Simultane lineare Gleichungen in \mathbb{Z}_n). Welche ganzen Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ lösen sowohl die Gleichung $\overline{9} \cdot \overline{x} = \overline{6}$ im Ring \mathbb{Z}_{12} als auch die Gleichung $\overline{5} \cdot \overline{x} = \overline{15}$ im Ring \mathbb{Z}_{25} ?

(Hinweis: Man suche sich zunächst eine der Gleichungen aus und bestimme alle ganzen Zahlen, die sie lösen. Dieses Ergebnis setze man dann in die andere Gleichung ein.)

Aufgabe 2 (Eigenschaften von Relationen). Es sei M die Menge aller Menschen. Man untersuche die folgenden Relationen auf M auf Reflexivität, Transitivität, Symmetrie und Antisymmetrie. Welche von ihnen sind Äquivalenzrelationen, welche sind Ordnungen oder sogar totale Ordnungen?

- Die Relation mit $x \sim y :\iff x$ hat die gleiche Mutter wie y .
- Die Relation mit $x \sim y :\iff x = y$ oder x ist ein Nachkomme von y .
- Die Relation mit $x \sim y :\iff x$ hat den gleichen Vor- oder Nachnamen wie y .
- Die Relation mit $x \sim y :\iff x \neq y$, und x und y kennen sich persönlich.

Aufgabe 3 (Relationen und Funktionen).

- Man veranschauliche die folgenden Relationen in der Anschauungsebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
 - $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \mid y - \sqrt{x} = -1\}$ als Relation zwischen \mathbb{R}_0^+ und \mathbb{R} .
 - $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 \leq 36 - y^2\}$ als Relation auf \mathbb{R} .
- Man entscheide für jede der beiden Relationen aus a), ob sie eine Funktion (d.h. der Graph einer Funktion) ist. Was ändert sich, wenn man R_1 als Relation auf \mathbb{R} auffasst?

Aufgabe 4 (Äquivalenzrelationen).

- „Eine Relation, die symmetrisch und transitiv ist, ist automatisch auch reflexiv“, sagt Franz. „Denn aus $x \sim y$ folgt aufgrund der Symmetrie $y \sim x$, und aus $x \sim y$ und $y \sim x$ folgt wegen der Transitivität $x \sim x$. Also ist die Relation reflexiv.“

Was ist von dieser Argumentation zu halten?

- Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen und transitiven Relation an, die *nicht* reflexiv ist.