Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Wintersemester 2024/25
22. Juli 2025

Lineare Algebra II – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1.
Sei $f\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus des endlich dimensionalen euklidischen Raumes V. Beweisen Sie, dass $\mathrm{id}_V + f$ orthogonal ist, wenn und nur wenn $f = 0$.

Lösung.
Da f nilpotent ist, gilt $\chi_f(X) = X^n$ für $n = \dim V$, insbesondere ist die Spur $\mathrm{tr}(f)$ von f gleich 0. Dann ist klar, dass $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_V + f) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_V) = n$.

Auf der anderen Seite, sei $e_1, \ldots, e_n$ eine orthonormale Basis von V und A die Matrix von $\mathrm{id}_V + f$ in dieser Basis. Nehmen wir an, dass A orthogonal ist. Dann bilden auch die Spalten $v_i := Ae_i$ dieser Matrix eine orhtonormale Basis, insbesondere $||v_i|| = 1$. Dann schließen wir, dass $|a_{ii}| \leq 1$ für die Diagonaleinträge a_{ii} der Matrix A, und $|a_{ii}| = 1$, wenn und nur wenn $v_i = \pm e_i$. Aber

$$n = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \leq \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}| \leq n,$$

und somit sind obige Ungleichungen eigentlich Gleichungen, deshalb $a_{ii} = |a_{ii}|$ und $|a_{ii}| = 1$ für alle i. Mit anderen Worten $v_i = e_i$ für alle i und $A = E$.

Bemerkung: Sie werden später beweisen, dass $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ eine kompakte reelle Mannigfaltigkeit ist und, dass die Unipotenten eine unbeschränkte Untergruppe in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ erzeugen. Dies erklärt dieses Phänomen auf andere Weise.

Aufgabe 2.
Finden Sie eine Quadratwurzel der Matrix $A = \begin{pmatrix} 33 & 24 \\ 48 & 57 \end{pmatrix}$.
Hinweis: Beweisen Sie, dass A diagonalisierbar mit positiven Eigenwerten ist.

Lösung.
Finden wir zuerst die Eigenwerte von A:

$$\chi_A(X) = (X-33)(X-57)-24\cdot 48 = X^2-90X+1881-1152 = X^2-90X+729 = (X-9)(X-81).$$

Jetzt finden wir die entsprechenden Eigenvektoren:

$$A - 9E = \begin{pmatrix} 24 & 24 \\ 48 & 48 \end{pmatrix}$$

und $\mathrm{Ker}(A - 9E) = \langle (1, -1)^t \rangle$, und

$$A - 81E = \begin{pmatrix} -48 & 24 \\ 48 & -24 \end{pmatrix}$$

und $\mathrm{Ker}(A - 81E) = \langle (1, 2)^t \rangle$.

Dann ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, deren Spalten diese Eigenvektoren sind, die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis zu der aus Eigenvektoren bestehenden Basis und

$$C^{-1}AC = \mathrm{diag}(9, 81).$$

In der Tat $C^{-1}ACe_i = C^{-1}Av_i = C^{-1}\lambda_i v_i = \lambda_i C^{-1}v_i = \lambda_i v_i$. Bezeichnen wir mit $D = \mathrm{diag}(9, 81)$. Dann ist klar, dass $R := \mathrm{diag}(3, 9)$ eine Quadratwurzel der Matrix D ist, d.h. $R^2 = D$. Aber dann

$$(CRC^{-1})^2 = CRC^{-1}CRC^{-1} = CR^2C^{-1} = CDC^{-1} = A,$$

d.h., CRC^{-1} ist eine Quadratwurzel der Matrix A. Es ist einfach zu finden, dass

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deshalb haben wir

$$CRC^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.
Sei $f\colon V \to V$ ein orthogonaler Endomorphismus des endlich dimensionalen euklidischen Raumes V. Beweisen Sie, dass f halb-einfach ist.

Lösung.
Sei $U \leq V$ ein f-invarianter Unterraum. Wir haben schon in Auf. 4 von Tutoriumsblatt 12 bewiesen, dass $U^\perp$ auch f-invariant ist.

In der Tat sei $w \in U^\perp$, d.h. $\forall\, u \in U$ haben wir $\langle u, w\rangle = 0$. Wenn A eine Matrix von f in einer orthonormalen Basis ist, dann ist sie orthogonal, d.h. $A^{-1} = A^t$ und

$$\langle u, f^{-1}(w)\rangle = u^t A^t w = \langle f(u), w\rangle = 0,$$

da U invariant ist. Wir haben bewiesen, dass $f^{-1}(U^\perp) \subseteq U^\perp$, aber f^{-1} ist injektiv und daher ist $f^{-1}(U^\perp) = U^\perp$ aus Dimensionsgründen. Das ist äquivalent zu $f(U^\perp) = U^\perp$.

Aber für alle $U \leq V$ haben wir $V = U \oplus U^\perp$. Mit anderen Worten haben wir bewiesen, dass jeder f-invariante Unterraum einen f-invarianten Komplementraum bestimmt. Das ist genau die Definition des halb-einfachen Unterraums.

Aufgabe 4.
Sei $f\colon U \to V$ ein $\mathbb{R}$-linearer Homomorphismus zwischen endlich dimensionalen euklidischen Räumen.

1. Beweisen Sie, dass eine orthonormale Basis $\mathcal{B}$ von U existiert, so dass $f^* \circ f\colon U \to U$ diagonal in dieser Basis ist: $[f^* \circ f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, und $d_i \geq 0$.
2. (Singulärwertzerlegung) Beweisen Sie, orthonormale Basen $\mathcal{B}$ von U und $\mathcal{C}$ von V existieren, so dass die Matrix von f in diesen Basen diagonal ist:

   $$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0 \ldots, 0),$$

   und $\sigma_i > 0$.
   Hinweis: Benutzen Sie die Basis $\mathcal{B}$ konstruiert in “1.”

3. (Polarzerlegung) Beweisen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ als Produkt $A = UP$ zerlegt werden kann für eine orthogonale Matrix U und eine positive halbdefinite symmetrische Matrix P.

Bemerkung: Vergleichen Sie "3." mit der polaren Zerlegung einer komplexen Zahl.

Lösung.

1. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{D}$ beliebige orthonormale Basen von U und V, und $A = [f]_{\mathcal{A},\mathcal{D}}$ ist die Matrix von f in diesen Basen. Dann $[f^*]_{\mathcal{D},\mathcal{A}} = A^t$. In der Tat ist f^* nach der Definition der eindeutige Homomorphismus, so dass $\langle f(u), v\rangle = \langle u, f^*(v)\rangle$ für alle $u \in U$, $v \in V$. Aber in orthonormalen Basen haben wir $\langle f(u), v\rangle = (Au)^t v = u^t A^t v$ und $\langle u, f^*(v)\rangle = u^t A^* v$.

   Dann hat $f^* \circ f \colon U \to U$ die Matrix $B := A^t A$ in der Basis $\mathcal{A}$. Es ist aber klar, dass B symmetrisch ist, da $(A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A$ und auch positiv halbdefinit: $v^t A^t A v = (Av)^t (Av) = ||Av||^2 \geq 0$.

   Nach dem Spektralsatz gibt es eine orthomormale Basis $\mathcal{B}$ von U, die aus den Eigenvektoren v_i von B bestehet. Insbesondere ist die Matrix D von B in dieser Basis diagonal: $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ und $d_i = v_i^t B v_i \geq 0$.

2. Nehmen wir die orthonormale Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ aus Teilaufgabe 1. Wir können auch annehmen, dass $d_1, \ldots, d_r > 0$ und $d_{r+1} = \ldots = d_n = 0$. Dann haben wir

   $$\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \langle (f^* \circ f)(v_i), v_j\rangle = \langle d_i v_i, v_j\rangle = d_i \langle v_i, v_j\rangle = d_i \cdot \delta_{ij}.$$

   Mit anderen Worten ist $||f(v_i)||^2 = d_i$ und deshalb ist $f(v_i) \neq 0$ für $i \leq r$ und $f(v_i) = 0$ für $i < r$. Die Vektoren $f(v_1), \ldots, f(v_r)$ sind auch orthogonal. Dann können wir diese Vektoren normieren: $w_i := \frac{1}{\sqrt{d_i}} f(v_i)$ für $i \leq r$ und ergänzen $w_1, \ldots w_r$ zu einer orthonormalen Basis $\mathcal{C}$ von V (vgl. Auf. 2 von Übungsblatt 10). Dann

   $$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0 \ldots, 0)$$

   für $\sigma_i := \sqrt{d_i}$.

3. Sei $U = V = \mathbb{R}^n$ und betrachten wir den Homomorphismus $f \colon U \to V$, der durch A induziert wird. Nach "2." gibt es orthonormale Basen $\mathcal{B}$ von U und $\mathcal{C}$ von V, so dass die Matrix von f in diesen Basen gleich $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$ ist. Betracthen wir die Matrizen Q, S des Basiswechsels von der Standardbasis zu $\mathcal{B}$ und von $\mathcal{C}$ zur Standardbasis. Dann

   $$D = SAQ \qquad \text{oder} \qquad A = Q^{-1} D S^{-1}.$$

   Aber Q und S sind orthonormale Matritzen, weil sie eine orthonormale Basis auf eine orthonormale Basis abbilden, insbesondere $Q^{-1} = Q^t$, $S^{-1} = S^t$. Dann

   $$A = Q^t D S^t = Q^t S^t \cdot S D S^t.$$

   Setzen wir $U := Q^t S^t$. Diese Matrix ist orthogonal und $P := SDS^t$ ist symmetrisch, da $(SDS^t)^t = (S^t)^t D^t S^t = SDS^t$, und positiv halbdefinit:

   $$v^t SDS^t v = (S^t v)^t D (S^t v) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i x_i^2 \geq 0$$

   für $S^t v =: (x_1, \ldots, x_n)^t$.