Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Sommersemester 2025
14. Juli 2025

Lineare Algebra II – Übungsblatt 11

Aufgabe 1.
Sei $f\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus des endlich dimensionalen euklidischen Raumes V. Beweisen Sie, dass $\mathrm{id}_V + f$ orthogonal ist, wenn und nur wenn $f = 0$.

Aufgabe 2.
Finden Sie eine Quadratwurzel der Matrix $A = \begin{pmatrix} 33 & 24 \\ 48 & 57 \end{pmatrix}$.
Hinweis: Beweisen Sie, dass A diagonalisierbar mit positiven Eigenwerten ist.

Aufgabe 3.
Sei $f\colon V \to V$ ein orthogonaler Endomorphismus des endlich dimensionalen euklidischen Raumes V. Beweisen Sie, dass f halb-einfach ist.

Aufgabe 4.
Sei $f\colon U \to V$ ein $\mathbb{R}$-linearer Homomorphismus zwischen endlich dimensionalen euklidischen Räumen.

1. Beweisen Sie, dass eine orthonormale Basis $\mathcal{B}$ von U existiert, so dass $f^* \circ f\colon U \to U$ diagonal in dieser Basis ist: $[f^* \circ f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, und $d_i \geq 0$.
2. (Singulärwertzerlegung) Beweisen Sie, orthonormale Basen $\mathcal{B}$ von U und $\mathcal{C}$ von V existieren, so dass die Matrix von f in diesen Basen diagonal ist:
$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0 \ldots, 0),$$
und $\sigma_i > 0$.
Hinweis: Benutzen Sie die Basis $\mathcal{B}$ konstruiert in “1.”
3. (Polarzerlegung) Beweisen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ als Produkt $A = UP$ zerlegt werden kann für eine orthogonale Matrix U und eine positive halbdefinite symmetrische Matrix P.

Bemerkung: Vergleichen Sie “3.” mit der polaren Zerlegung einer komplexen Zahl.