



Prof. Dr. Fabien Morel

Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Wintersemester 2024/25

22. Juli 2025

Lineare Algebra II – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 10

Aufgabe 1.

Finden Sie die orthogonale Projektion des Standard-Basisvektors $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ auf die Hyperebene

$$U = \left\{ (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

Lösung.

Erinnern wir uns daran, dass $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$. Deshalb gibt es eindeutige Vektoren $u \in U$ und $w \in U^\perp$, so dass $e_1 = u + w$. Der Vektor u ist die orthogonale Projektion von e_1 auf den Unterraum U .

Zuerst beschreiben wir $U^\perp$. Nach Definition von U haben wir $v := (1, \dots, 1)^t \in U^\perp$. In der Tat für alle $u = (x_1, \dots, x_n)^t \in U$ haben wir

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot 1 = \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Auf der anderen Seite $\dim U = n - 1$, da $U = \text{Ker}(\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ der Abbildung φ , die $u = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ auf $\sum_{i=1}^n x_i \in \mathbb{R}$ abbildet. Da $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$, muss $U^\perp$ Dimension 1 haben. Aber dann $U^\perp = \langle v = (1, \dots, 1)^t \rangle$.

Jetzt müssen wir $\alpha \in \mathbb{R}$ finden, so dass $e_1 - \alpha \cdot v \in U$, d.h.

$$(1 - \alpha) + \underbrace{(-\alpha) + \dots + (-\alpha)}_{n-1} = 0.$$

Es ist aber klar, dass $\alpha = \frac{1}{n}$, und deshalb $u = (\frac{n-1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n})^t$.

Aufgabe 2.

1. Seien $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ zueinander orthogonale Vektoren, d.h., $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$. Beweisen Sie, dass diese Vektoren linear unabhängig sind.
2. Beweisen Sie, dass jede Menge zueinander orthogonaler Vektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ zu einer Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^n$ ergänzt werden kann.

Lösung.

1. Nehmen wir an, dass $\sum_{i=1}^m v_i \alpha_i = 0$ für $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Da v_i zueinander orthogonal sind, schließen wir, dass für alle k

$$0 = \langle 0, v_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m v_i \alpha_i, v_k \right\rangle = \sum_{i=1}^m \langle v_i, v_k \rangle \alpha_i = \langle v_k, v_k \rangle \alpha_k.$$

Da $v_k \neq 0$, haben wir auch $\langle v_k, v_k \rangle > 0$, und deshalb $\alpha_k = 0$. Mit anderen Worten haben wir bewiesen, dass $\alpha_k = 0$ für alle k .

2. Setzen wir $U := \langle v_1, \dots, v_m \rangle \leq \mathbb{R}^n$. Da $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig sind, ist $v_1, \dots, v_m$ eine Orthogonalbasis von U .

Erinnern wir uns daran, dass jeder Unterraum $W \leq \mathbb{R}^n$ mit Einschränkung des Standard-Skalarprodukts von $\mathbb{R}^n$ auf W selbst ein euklidischer Raum ist. Wie Sie schon aus der Vorlesung wissen, lässt jeder euklidische Raum eine Orthogonalbasis zu.

Betrachten wir jetzt $U^\perp \leq \mathbb{R}^n$ und eine Orthogonalbasis $w_1, \dots, w_s$ von $U^\perp$. Da $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$, schließen wir, dass $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_s$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Es ist einfach zu sehen, dass diese Basis orthogonal ist.

In der Tat, nach Ahnnahme sind v_i zueinander orthogonal und nach Konstruktion sind auch w_i zueinander orthogonal. Aber, da $v_i \in U$ und $w_j \in U^\perp$, schließen wir, dass jeder Vektor v_i auch zu jedem Vektor w_j orthogonal ist.

Aufgabe 3.

1. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^3$ an.

2. Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $(1, 2, 3)^t \in \mathbb{R}^3$ in der resultierenden Basis.

Lösung.

1. Erinnern Sie sich daran, dass das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren von einer beliebigen Basis ausgeht und eine orthonormale Basis erzeugt. Nehmen wir an, dass die ersten $i-1$ Vektoren $u_1, \dots, u_{i-1}$ der gegebenen Basis ein orthonormales System bilden, dass aber der i -te Vektor v_i nicht orthogonal zu den vorhergehenden Vektoren ist. Dann ist der Vektor

$$w_i := v_i - \langle u_1, v_i \rangle \cdot u_1 - \dots - \langle u_{i-1}, v_i \rangle \cdot u_{i-1}$$

orthogonal zu $u_1, \dots, u_{i-1}$ und $u_i := \frac{w_i}{\|w_i\|}$ ist ebenfalls normal. Wenn wir diesen Prozess fortsetzen, erhalten wir die Orthonormalbasis desselben Raums.

Es gibt auch eine Version dieses Algorithmus ohne Normalisierung: Nehmen wir an, dass $w_1, \dots, w_{i-1}$ orthogonal sind, aber nicht notwendigerweise normal, dann ist

$$w_i := v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle w_j, v_i \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j$$

orthogonal zu $w_1, \dots, w_{i-1}$. Diese Formel ist manchmal bequemer, um Radikale bei den Berechnungen zu umgehen. Die Vektoren können am Ende normiert werden, falls nötig.

Nun wenden wir den Algorithmus auf unseren Fall an. Bezeichnen wir $w_1 := v_1$ und $u_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^t$. Dann

$$w_2 := v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $u_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)^t$. Abschließend,

$$w_3 := v_3 - \langle u_1, v_3 \rangle u_1 - \langle u_2, v_3 \rangle u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und $u_3 := \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)^t$.

2. Wir müssen $\alpha_i \in \mathbb{R}$ finden, so dass $\sum_{i=1}^3 u_i \alpha_i = (1, 2, 3)^t$. Bemerken wir, dass

$$\left\langle \sum_{i=1}^3 u_i \alpha_i, u_k \right\rangle = \alpha_k,$$

da u_1, u_2, u_3 eine orthonormale Basis ist. Dann

$$\alpha_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

$$\alpha_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\alpha_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 4.

Sei V ein n -dimensionaler euklidischer Raum, U ein Unterraum und $v \in V$. Sei $\text{pr}_U^\perp: V \rightarrow U$ die orthogonale Projektion auf U und

$$\text{dist}(v, U) = \min_{u \in U} \{\|u - v\|\}$$

der Abstand von v zu U . Beweisen Sie, dass $\text{dist}(v, U) = \|\text{pr}_U^\perp(v)\|$.

Lösung.

Erinnern wir uns daran, dass für jeden Vektor $v \in V$ es eindeutige Vektoren $p \in U$ und $n \in U^\perp$ gibt, so dass $v = p + n$. Dann ist $p = \text{pr}_U^\perp(v)$ die orthogonale Projektion von v auf U .

Es ist genug zu beweisen, dass für jedes $u \in U$ gilt $\|v - p\|^2 \leq \|v - u\|^2$. Aber $\|v - p\|^2 = \|n\|^2$ und

$$\|v - u\|^2 = \langle (p - u) + n, (p - u) + n \rangle = \langle p - u, p - u \rangle + 2\langle p - u, n \rangle + \langle n, n \rangle.$$

Bemerken wir, dass p, u und deshalb $p - u$ in U liegen und $n \in U^\perp$, weshalb $\langle p - u, n \rangle = 0$. Mit anderen Worten

$$\|v - u\|^2 = \|p - u\|^2 + \|n\|^2 \geq \|n\|^2.$$