Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Sommersemester 2025
14. Juli 2025

Lineare Algebra II – Übungsblatt 10

Aufgabe 1.
Finden Sie die orthogonale Projektion des Standard-Basisvektors $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ auf die Hyperebene

$$U = \left\{ (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

Aufgabe 2.

1. Seien $v_1, \ldots v_m \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ zueinander orthogonale Vektoren, d.h., $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$. Beweisen Sie, dass diese Vektoren linear unabhängig sind.
2. Beweisen Sie, dass jede Menge zueinander orthogonaler Vektoren $v_1, \ldots v_m \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ zu einer Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^n$ ergänzt werden kann.

Aufgabe 3.

1. Wenden Sie das Gram–Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   von $\mathbb{R}^3$ an.
2. Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $(1, 2, 3)^t \in \mathbb{R}^3$ in der resultierenden Basis.

Aufgabe 4.
Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Raum, U ein Unterraum und $v \in V$. Sei $\mathrm{pr}_U^\perp \colon V \to U$ die orthogonale Projektion auf U und

$$\mathrm{dist}(v, U) = \min_{u \in U} \{ ||u - v|| \}$$

der Abstand von v zu U. Beweisen Sie, dass $\mathrm{dist}(v, U) = ||v - \mathrm{pr}_U^\perp(v)||$.