Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Wintersemester 2024/25
8. Juli 2025

Lineare Algebra II – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 9

Aufgabe 1.
Sei V ein euklidischer Raum und $U \leq V$ ein $\mathbb{R}$-linearer Unterraum. Erinnern Sie sich daran, dass die Abbildung $\Phi\colon V \to V^\vee$, die v auf die Linearform $\langle v, -\rangle$ abbildet, ein Isomorphismus ist. Beweisen Sie, dass $\Phi(v)|_U = 0$, wenn und nur wenn $v \in U^\perp$.

Lösung.
Nehmen wir zuerst an, dass $\Phi(v)|_U = 0$, d.h., $\forall\, u \in U$ gilt:

$$0 = \big(\Phi(v)\big)(u) = \langle v, u\rangle.$$

Aber dann $v \in U^\perp = \{w \in V \mid \forall\, u \in U \quad \langle u, w\rangle = 0\}$.

Nehmen wir jetzt an, dass $v \in U^\perp$, d.h., $\forall\, u \in U$ gilt:

$$0 = \langle v, u\rangle = \big(\Phi(v)\big)(u).$$

Aber dann $\Phi(v)|_U = 0$.

Aufgabe 2.

1. Seien U, V $\mathbb{R}$-Vektorräume und $\varphi\colon U \to V$ ein $\mathbb{R}$-Monomorphismus. Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und betrachten Sie $\varphi^*(\langle\ ,\ \rangle)\colon U \times U \to \mathbb{R}$, so dass $\varphi^*(\langle u, v\rangle) := \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle$. Beweisen Sie, dass $\varphi^*(\langle\ ,\ \rangle)$ ein Skalarprodukt auf U ist.
2. Seien $(U, \langle\ ,\ \rangle_U)$, $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ euklische Räumen der Dimension $\dim U = \dim V = n$. Beweisen Sie, dass ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus $\varphi\colon U \to V$ existiert, so dass $\varphi^*(\langle\ ,\ \rangle_V) = \langle\ ,\ \rangle_U$.
   Bemerkung: Mit anderen Worten alle euklidischen Räume gleicher Dimension sind *isometrisch.*

Lösung.

1. Wir müssen beweisen, dass $\varphi^*(\langle\ ,\ \rangle)$ die Axiome des Skalarprodukts erfüllt. Es ist klar, dass $\varphi^*(\langle\ ,\ \rangle)$ symmetrisch ist:

   $$\varphi^*(\langle v, u\rangle) = \langle \varphi(v), \varphi(u)\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \varphi^*(\langle u, v\rangle).$$

   Bilinearität folgt durch

   $$\begin{aligned}\varphi^*(\langle u, v\lambda + w\mu\rangle) &= \langle \varphi(u), \varphi(v\lambda + w\mu)\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\lambda + \varphi(w)\mu\rangle = \\ &= \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle\lambda + \langle \varphi(u), \varphi(w)\rangle\mu = \varphi^*(\langle u, v\rangle)\lambda + \varphi^*(\langle u, w\rangle)\mu.\end{aligned}$$

Es ist auch klar, dass $\varphi^*(\langle\ ,\ \rangle)$ nicht-negativ ist:

$$\varphi^*(\langle u, u\rangle) = \langle \varphi(u), \varphi(u)\rangle \geq 0,$$

und $0 = \varphi^*(\langle u, u\rangle) = \langle \varphi(u), \varphi(u)\rangle$, wenn und nur wenn $\varphi(u) = 0$. Aber φ ist ein Monomorphismus, d.h. $\varphi(u) = 0$, wenn und nur wenn $u = 0$. Mit anderen Worten: $\varphi^*(\langle\ ,\ \rangle)$ ist positiv definit.

2. Wie Sie schon aus der Vorlesung wissen, gibt es eine orthonormale Basis $e_1, \ldots, e_n$ von U und eine orthonormale Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Betrachten wir eine lineare Abbildung $\varphi\colon U \to V$, die e_i auf v_i abbildet für alle $1 \leq i \leq n$. Dann

$$\varphi^*(\langle e_i, e_j\rangle_V) = \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle_V = \langle v_i, v_j\rangle_V = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle_U,$$

und deshalb gilt für beliebige $u = \sum_{i=1}^n e_i a_i$ und $u' = \sum_{i=1}^n e_i b_i \in U$:

$$\varphi^*(\langle u, u'\rangle_V) = \varphi^*\left(\left\langle \sum_{i=1}^n e_i a_i, \sum_{j=1}^n e_j b_j \right\rangle_V\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi^*(\langle e_i, e_j\rangle_V) \cdot a_i b_j =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j\rangle_U \cdot a_i b_j = \left\langle \sum_{i=1}^n e_i a_i, \sum_{j=1}^n e_j b_j \right\rangle_U = \langle u, u'\rangle_U.$$

Aufgabe 3.
Für $v = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ betrachten Sie $||v||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $||v||_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, und die standard euklidische Norm $||v||_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$.

1. Beweisen Sie, dass $||\ ||_1$, $||\ ||_2$, $||\ ||_\infty$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind.
2. Bezeichnen Sie mit $B^{(p)}(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid ||v - u||_p < r\}$ die Kugel mit Zentrum u und Radius r, die $||\ ||_p$ entspricht, $p = 0, 1, \infty$. Zeichnen Sie die Einheitskugeln $B^{(p)}(0, 1)$ für $n = 2$.
3. Beweisen Sie, dass $\varphi_p(u, v) := ||u + v||_p^2 - ||u||_p^2 - ||v||_p^2$ nicht bilinear ist für $p = 1, \infty$ (mit anderen Worten diese Normen sind nicht euklidisch).
4. Beweisen Sie, dass $||v||_1 \geq ||v||_2 \geq ||v||_\infty \geq \frac{1}{n}||v||_1$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.
5. Beweisen Sie, dass für alle $p, q \in \{1, 2, \infty\}$ es eine Familie von Kugeln $B^{(p)}(u_\alpha, r_\alpha)$ für $\alpha \in A$ gibt, so dass
$$B^{(q)}(0, 1) = \bigcup_{\alpha \in A} B^{(p)}(u_\alpha, r_\alpha).$$
Bemerkung: Mit anderen Worten die Topologien, die diese Normen definieren, sind gleich.

Lösung.

1. Wir müssen beweisen, dass $||\ \ ||_1$ und $||\ \ ||_\infty$ die Axiome der Norm erfüllen.

Für $v = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ gilt nach Definition, $||v||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$ und $||v||_1 = 0$, wenn und nur wenn $x_i = 0\ \forall\, i$, d.h. $v = 0$. Ähnlich $||v||_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \geq 0$ und $||v||_\infty = 0$, wenn und nur wenn $v = 0$.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann $||v \cdot \alpha||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i \cdot \alpha| = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |\alpha| = |\alpha| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| = |\alpha| \cdot ||v||_1$. Ähnlich

$$||v \cdot \alpha||_\infty = \max\{|x_1 \cdot \alpha|, \ldots, |x_n \cdot \alpha|\} = \max\{|x_1| \cdot |\alpha|, \ldots, |x_n| \cdot |\alpha|\} =$$
$$= |\alpha| \cdot \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = |\alpha| \cdot ||v||_\infty.$$

Zum Schluss für $w = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{R}^n$ haben wir $|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i|$, und deshalb

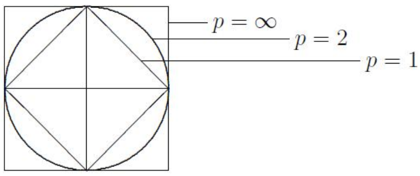
$$||v + w||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| = ||v||_1 + ||w||_1,$$

und

$$||v + w||_\infty = \max\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|\} = |x_{i_0} + y_{i_0}| \le |x_{i_0}| + |y_{i_0}| \le$$
$$\le \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\} = ||v||_\infty + ||w||_\infty.$$

2. Für $p = \infty$ besteht die Einheitskugel aus $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, so dass $-1 \le x \le 1$ und $-1 \le y \le 1$.

   Für $p = 1$ betrachten wir getrennt vier Viertel der Ebene. Für $x, y \ge 0$ haben wir $x + y \le 1$, für $y \le 0 \le x$ haben wir $x - y \le 1$, für $x, y \le 0$ haben wir $-x - y \le 1$, und für $x \le 0 \le y$ haben wir $y - x \le 1$.



3. Für $p = 1$ bemerken wir, dass

$$\varphi_1\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \left|\left|\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right|\right|_1^2 - \left|\left|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|\right|_1^2 - \left|\left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|\right|_1^2 = 3^2 - 2^2 - 1^2 = 4,$$

   aber

$$\varphi_1\left(\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \left|\left|\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}\right|\right|_1^2 - \left|\left|\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\end{pmatrix}\right|\right|_1^2 - \left|\left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|\right|_1^2 = 1^2 - 1^2 - 1^2 \ne -\frac{1}{2} \cdot 4.$$

   Ähnlich für $p = \infty$

$$\varphi_\infty\left(\begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \left|\left|\begin{pmatrix}2\\-1/2\end{pmatrix}\right|\right|_\infty^2 - \left|\left|\begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}\right|\right|_\infty^2 - \left|\left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|\right|_\infty^2 = 2^2 - 1^2 - 1^2 = 2,$$

   aber

$$\varphi_\infty\left(\begin{pmatrix}-1\\1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \left|\left|\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}\right|\right|_\infty^2 - \left|\left|\begin{pmatrix}-1\\1/2\end{pmatrix}\right|\right|_\infty^2 - \left|\left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|\right|_\infty^2 = (1/4)^2 - 1^2 - 1^2 \ne -1 \cdot 2.$$

4. Für $v = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ haben wir

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 \ge \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

   d.h. $||v||_1^2 \ge ||v||_2^2$. Ähnlich

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\}^2,$$

   d.h. $||v||_2^2 \ge ||v||_\infty^2$. Zum Schluss

$$n \cdot \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\} \ge \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

   d.h. $||v||_\infty \ge \frac{1}{n} ||v||_1$.

5. Nach "4." gibt es $c \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $||v||_p \geq c \cdot ||v||_q$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

   Für $u \in B^{(q)}(0,1)$ bezeichnen wir $\varepsilon = \varepsilon_u := \frac{1}{2}(1 - ||u||_q) > 0$. Dann $B^{(q)}(u,\varepsilon) \subseteq B^{(q)}(0,1)$. In der Tat für $v \in B^{(q)}(u,\varepsilon)$ haben wir

   $$||v||_q = ||u + (v-u)||_q \leq ||u||_q + ||v-u||_q < ||u||_q + \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

   Aber dann $B^{(p)}(u, c\cdot\varepsilon) \subseteq B^{(q)}(u,\varepsilon) \subseteq B^{(q)}(0,1)$. In der Tat für $v \in B^{(p)}(u, c\cdot\varepsilon)$ haben wir

   $$c \cdot \varepsilon > ||v-u||_p \geq c \cdot ||v-u||_q.$$

   Deshalb $\varepsilon > ||v-u||_q$ und $v \in B^{(q)}(u,\varepsilon)$.

   Dann auch

   $$\bigcup_{u \in B^{(q)}(0,1)} B^{(p)}(u, c\cdot\varepsilon_u) \subseteq B^{(q)}(0,1),$$

   aber $\forall\, u \in B^{(q)}(0,1)$ gilt auch $u \in B^{(p)}(u, c\cdot\varepsilon_u) \subseteq \bigcup_{u \in B^{(q)}(0,1)} B^{(p)}(u, c\cdot\varepsilon_u)$.

Aufgabe 4.
Sei K ein Körper, $\operatorname{char} K \neq 2$, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi\colon V \times V \to K$ eine symmetrische K-bilineare Abbildung. Nehmen Sie an, dass die Abbildung $V \to V^\vee$, die $v \in V$ auf die Linearform $\varphi(v,-) \in V^\vee$ abbildet, ein Isomorphismus ist (in diesem Fall wird φ *nicht ausgeartet* genannt).

1. Beweisen Sie, dass es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gibt, so dass $\varphi(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$ (eine solche Basis wird *orthogonal* genannt).
2. Für $K = \mathbb{R}$ beweisen Sie, dass es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gibt so dass $|\varphi(v_i, v_j)| = \delta_{ij}$.

Lösung.

1. Wir beweisen zuerst, dass es einen Vektor $v_0 \in V$ gibt, so dass $\varphi(v_0, v_0) \neq 0$. In der Tat,

   $$\varphi(u+v, u+v) = \varphi(u,u) + 2\varphi(u,v) + \varphi(v,v),$$

   und deshalb $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(\varphi(u+v,u+v) - \varphi(u,u) - \varphi(v,v))$ (wir benutzen hier $\operatorname{char} K \neq 2$). Wenn also $\varphi(v,v) = 0$ für alle $v \in V$, dann auch $\varphi(u,v) = 0$ für alle u, $v \in V$, aber dann ist φ ausgeartet.

   Bezeichnen wir $v_0^\perp := \{u \in V \mid \varphi(u, v_0) = 0\}$ und beweisen wir jetzt, dass $V = \langle v_0 \rangle \oplus v_0^\perp$. In der Tat für $v \in V$ bezeichnen wir $c = \varphi(v, v_0)/\varphi(v_0, v_0) \in K$. Dann $\varphi(v - cv_0, v_0) = 0$, d.h. $v - cv_0 \in v_0^\perp$. Aber $v = cv_0 + (v - cv_0)$ oder mit anderen Worten $V = \langle v_0 \rangle + v_0^\perp$. Nehmen wir jetzt $v \in \langle v_0 \rangle \cap v_0^\perp$. Dann $v = av_0$ und $0 = \varphi(v, v_0) = a\varphi(v_0, v_0)$. Das ist nur möglich, wenn $a = 0$, weshalb $\langle v_0 \rangle \cap v_0^\perp = 0$.

   Beweisen wir jetzt, dass $\varphi|_{v_0^\perp}$ ebenfalls nicht ausgeartet ist. Da $v_0^\perp$ und $(v_0^\perp)^\vee$ die gleiche Dimension haben, ist es genug zu zeigen, dass $\Phi\colon v_0^\perp \to (v_0^\perp)^\vee$ ein Monomorphismus ist. Nehmen wir an, dass es $u \in v_0^\perp$ gibt, so dass $\Phi(u) = 0$, mit anderen Worten für jedes $u' \in v_0^\perp$ gilt $\varphi(u, u') = 0$. Aber $\varphi(u, v_0) = 0$, da auch $u \in v_0^\perp$. Da $V = \langle v_0 \rangle \oplus v_0^\perp$, schließen wir, dass wir für jedes $v \in V$ schreiben können $v = u' + cv_0$ für $u' \in v_0^\perp$, $c \in K$, und deshalb

   $$\varphi(u,v) = \varphi(u, u' + cv_0) = \varphi(u, u') + c\varphi(u, v_0) = 0.$$

   Da φ nich ausgeartet ist, schließen wir, dass $u = 0$.

   Als letztes beweisen wir per Induktion nach $n = \dim V$, dass V eine orthogonale Basis hat. Der Fall "$n = 1$" ist klar.

Da $\varphi|_{v_0^\perp}$ nicht ausgeartet ist, gibt es eine orthogonale Basis $v_1, \ldots, v_{n-1}$ von $v_0^\perp$ nach Induktionsahnnahme. Dann ist $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n := v_0$ eine Basis von V, da $V = \langle v_0 \rangle \oplus v_0^\perp$ und sie ist orthogonal, da $v_i \in v_0^\perp$ für $i < n$.

2. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine orthogonale Basis wie in "1." Nach Konstruktion $\varphi(v_i, v_i) \neq 0$ für alle i. Sei $u_i := v_i / \sqrt{|\varphi(v_i, v_i)|}$. Dann

$$\varphi(u_i, u_i) = \varphi\left(v_i/\sqrt{|\varphi(v_i,v_i)|},\, v_i/\sqrt{|\varphi(v_i,v_i)|}\right) = \frac{1}{|\varphi(v_i,v_i)|}\varphi(v_i,v_i) = \pm 1.$$

Es ist aber klar, dass u_i auch orthogonal sind.