LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Fabien Morel

Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Sommersemester 2025

30. Juni 2025

Lineare Algebra II – Übungsblatt 9

Aufgabe 1.
Sei V ein euklidischer Raum und $U \leq V$ ein $\mathbb{R}$-linearer Unterraum. Erinnern Sie sich daran, dass die Abbildung $\Phi\colon V \to V^\vee$, die v auf die Linearform $\langle v, - \rangle$ abbildet, ein Isomorphismus ist. Beweisen Sie, dass $\Phi(v)|_U = 0$, wenn und nur wenn $v \in U^\perp$.

Aufgabe 2.

1. Seien U, V $\mathbb{R}$-Vektorräume und $\varphi\colon U \to V$ ein $\mathbb{R}$-Monomorphismus. Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und betrachten Sie $\varphi^*(\langle\ ,\ \rangle)\colon U \times U \to \mathbb{R}$, so dass $\varphi^*(\langle u, v \rangle) := \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle$. Beweisen Sie, dass $\varphi^*(\langle\ ,\ \rangle)$ ein Skalarprodukt auf U ist.
2. Seien $(U, \langle\ ,\ \rangle_U)$, $(V, \langle\ ,\ \rangle_V)$ euklische Räumen der Dimension $\dim U = \dim V = n$. Beweisen Sie, dass ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus $\varphi\colon U \to V$ existiert, so dass $\varphi^*(\langle\ ,\ \rangle_V) = \langle\ ,\ \rangle_U$.
   Bemerkung: Mit anderen Worten alle euklidischen Räume gleicher Dimension sind *isometrisch.*

Aufgabe 3.
Für $v = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ betrachten Sie $||v||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $||v||_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, und die standard euklidische Norm $||v||_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$.

1. Beweisen Sie, dass $||\ ||_1$, $||\ ||_2$, $||\ ||_\infty$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind.
2. Bezeichnen Sie mit $B^{(p)}(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid ||v - u||_p \leq r\}$ die Kugel mit Zentrum u und Radius r, die $||\ ||_p$ entspricht, $p = 0, 1, \infty$. Zeichnen Sie die Einheitskugeln $B^{(p)}(0, 1)$ für $n = 2$.
3. Beweisen Sie, dass $\varphi_p(u, v) := ||u + v||_p^2 - ||u||_p^2 - ||v||_p^2$ nicht bilinear ist für $p = 1, \infty$ (mit anderen Worten diese Normen sind nicht euklidisch).
4. Beweisen Sie, dass $||v||_1 \geq ||v||_2 \geq ||v||_\infty \geq \frac{1}{n}||v||_1$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.
5. Beweisen Sie, dass für alle $p, q \in \{1, 2, \infty\}$ es eine Familie von Kugeln $B^{(p)}(u_\alpha, r_\alpha)$ für $\alpha \in A$ gibt, so dass
   $$B^{(q)}(0, 1) = \bigcup_{\alpha \in A} B^{(p)}(u_\alpha, r_\alpha).$$
   Bemerkung: Mit anderen Worten die Topologien, die diese Normen definieren, sind gleich.

Aufgabe 4.
Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi\colon V \times V \to K$ eine symmetrische K-bilineare Abbildung. Nehmen Sie an, dass die Abbildung $V \to V^\vee$, die $v \in V$ auf die Linearform $\varphi(v, -) \in V^\vee$ abbildet, ein Isomorphismus ist (in diesem Fall wird φ *nicht ausgeartet* genannt).

1. Beweisen Sie, dass es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gibt, so dass $\varphi(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$ (eine solche Basis wird *orthogonal* genannt).
2. Für $K = \mathbb{R}$ beweisen Sie, dass es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gibt so dass $|\varphi(v_i, v_j)| = \delta_{ij}$.