Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Sommersemester 2025
23. Juni 2025

Lineare Algebra II – Übungsblatt 8

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die Jordan-Normalform und eine Jordan-Basis der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 2.

1. Sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, so dass $\chi_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ irreduzibel ist. Beweisen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$ gibt, so dass A eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ in dieser Basis hat, für $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus 0$.
   Hinweis: Betrachten Sie A als eine komplexe Matrix.
2. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein halbeinfacher Endomorphismus. Beweisen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass $[f]_{\mathcal{B}}$ blockdiagonale Gestalt hat, die aus 1×1 Blöcken und 2×2 Blöcken der Form $\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ für $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R} \setminus 0$, $i \in \mathbb{N}$, besteht.

Aufgabe 3.
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum der Dimension n und $f\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus. Betrachten Sie die Folge verallgemeinerter Eigenräume für f:

$$0 \neq \mathrm{Ker}(f) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^2) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Ker}(f^{m-1}) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^m) = V$$

(vgl. Aufgabe 4 von Tutoriumsblatt 7) und setzen wir $k_i := \dim \mathrm{Ker}(f^i)$. Beweisen Sie, dass $2k_i \geq k_{i+1} + k_{i-1}$.
Beispiel: Für $n = 3$, $m = 2$ impliziert die obige Ungleichung, dass $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$.

Aufgabe 4.
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum der Dimension n und $f_1, \ldots, f_n$ paarweise kommutierende nilpotente Endomorphismen von V. Beweisen Sie, dass $f_1 \circ \ldots \circ f_n = 0$.
Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass f_i gleichzeitig trigonalisierbar sind.