LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Wintersemester 2024/25
30. Juni 2025

Lineare Algebra II – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die Jordan-Normalform und eine Jordan-Basis der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $\chi_A(X)$ nur eine komplexe Nullstelle hat.

Lösung.
Erinnenr wir uns daran, dass die Matrix

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Jordan-Block heißt für $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Wie Sie schon aus der Vorlesungen wissen, gibt es für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^n$, so dass f blockdiagonal in dieser Basis ist:

$$N := [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0\dots & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix},$$

für Jordan-Blöcke $J_{k_i}(\lambda_i)$. Eine solche Basis $\mathcal{B}$ heißt eine Jordan-Basis der Matrix A und N heißt Jordan-Normalform. Es ist klar, dass λ_i Eigenwerte von N (und von A) sind.

Berechnen wir zuerst die Jordan-Normalform von A. Finden wir die Eigenwerte von A:

$$\chi_A(X) = \det(X \cdot E - A) = \begin{vmatrix} X+4 & -2 & -10 \\ 4 & X-3 & -7 \\ 3 & -1 & X-7 \end{vmatrix} =$$

$$= (X+4)(X-3)(X-7) + 42 + 40 + 30(X-3) - 7(X+4) + 8(X-7) =$$

$$= X^3 - 6X^2 + (21-28-12+30-7+8)X + (84+82-90-28-56) = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = (X-2)^3.$$

Dann gibt es die folgenden Möglichkeiten für die Jordan-Normalform von A:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad N_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die dritte Möglichkeit N_3 ist unmöglich, da A keine Skalarmatrix ist.

Um zu entscheiden, ob A Jordan-Normalform N_1 oder N_2 hat, bemerken wir, dass N_2 zwei linear unabhängige Eigenvektoren e_1 und e_3 hat, die zum Eigenwert 2 gehören und

$$\dim \operatorname{Ker}(N_1 - 2E) = 3 - \operatorname{rk}(N_1 - 2E) = 1.$$

Da die Dimension des Eigenraums nicht von der Wahl der Basis nicht abhängt, genügt es $\dim \operatorname{Ker}(A - 2E)$ zu berechnen, um die Jordan-Normalform von A zu finden.

Lösen wir dazu das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrung:

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann ist die Lösungsmenge $\{(x, y, z)^t \in \mathbb{C}^3 \mid x = 2z, \quad y = z\}$. Mit anderen Worten es gilt $\dim \operatorname{Ker}(A - 2E) = 1$ und deshalb ist N_1 die Jordan-Normalform von A.

Jetzt finden wir eine Jordan-Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ der Matrix A. DAzu müssen wir Basisvektoren v_i finden, so dass $Av_1 = 2v_1$, $Av_2 = 2v_2 + v_1$ und $Av_3 = 2v_3 + v_2$.

Der Vektor v_1 ist ein Eigenvektor von A und wir haben diesen schon gefunden: $v_1 = (2, 1, 1)^t$. Jetzt lösen wir das Gleichungssystem $(A - 2E)X = v_1$, um v_2 zu finden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 10 & 2 \\ -4 & 1 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Somit nehmen wir als v_2 zum Beispiel $v_2 = (-2, 0, -1)^t$. Zum Schluss lösen wir $(A - 2E)X = v_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 10 & -2 \\ -4 & 1 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Dann nehmen wir als v_3 zum Beispiel $v_3 = (7, 0, 4)^t$. Nach Konstruktion hat A die Matrix N_1 in der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper, $V = K[X]/(X - \lambda)^n$ für $\lambda \in K$ und $n \in \mathbb{N}$, und f der Endomorphismus von V induziert durch Multiplikation mit X. Bestimmen Sie die Jordan-Zerlegung von f, d.h. die Polynome $D(X)$, $N(X) \in K[X]$, so dass $f = D(f) + N(f)$, $D(f)$ diagonalisierbar und $N(f)$ nilpotent ist.

Lösung.
Betrachten wir Polynome $D(X) := \lambda$, $N(X) := X - \lambda$. Dann ist klar, dass $f = D(f) + N(f)$, $D(f) = \lambda \cdot \mathrm{id}$, diagonalisierbar ist und $N(f) = \overline{(X - \lambda)} \cdot -$ nilpotent ist.

Aufgabe 3.
Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sei $P(X) \in K[X]$, so dass $P(f)$ invertierbar ist.

1. Beweisen Sie, dass alle Primfaktoren von $P(X)$ koprim zu $\chi_f(X)$ sind.

2. Beweisen Sie, dass es $Q(X) \in K[X]$ gibt, so dass $P(f)^{-1} = Q(f)$.

Lösung.

1. Betrachten wir einen Primfaktor $Q(X)$ von $P(X)$ und schreiben wir $P(X) = Q(X) \cdot R(X)$. Dann $Q(f)R(f)P(f)^{-1} = P(f)P(f)^{-1} = \mathrm{id}$ und deshalb ist $Q(f)$ auch invertierbar.

   Nehmen wir an, dass $Q(X)$ und $\chi_f(X)$ nicht koprim sind. Dann ist $Q(X)$ ein Primteiler von $\chi_f(X)$, aber $\chi_f(X)$ und $\mu_f(X)$ haben die gleichen Primteiler. Daher ist $Q(f)$ auch ein Primteiler von $\mu_f(X)$. Schreiben wir $\mu_f(X) = Q(X)S(X)$. Dann $S(f) = Q(f)^{-1}Q(f)S(f) = Q(f)^{-1}\mu_f(f) = 0$, aber das widerspricht der Minimalität von $\mu_f(X)$. Der Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war, und $Q(X)$ und $\chi_f(X)$ koprim sind.

2. Bemerken wir zuerst, dass $P(X)$ und $\chi_f(X)$ koprim sind. In der Tat, falls sie nicht koprim sind, gibt es einen Primfaktor von $P(X)$, der $\chi_f(X)$ teilt, was aber nach "1." unmöglich ist.

   Da $P(X)$ und $\chi_f(X)$ koprim sind, gibt es $Q(X)$, $R(X) \in K[X]$, so dass $Q(X)P(X) + R(X)\chi_f(X) = 1$. Aber dann auch $1 = Q(f)P(f) + R(f)\chi_f(f) = Q(f)P(f)$. Mit andere Worten $Q(f) = P(f)^{-1}$.

Aufgabe 4.
Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und f, $g\colon V \to V$ diagonalisierbare Endomorphismen. Beweisen Sie, dass f und g dann und nur dann kommutieren, wenn sie gleichzeitig diagonalisierbar sind (d.h., es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass sowohl $[f]_\mathcal{B}$ als auch $[g]_\mathcal{B}$ diagonal sind).
Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 3 aus Übungsblatt 5 benutzen.

Lösung.
Nehmen wir zuerst an, dass f und g kommutieren. Sei

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(g - \lambda \cdot \mathrm{id})$$

ein Eigenraum von g für einen Eigenwert λ von g. Da g diagonalisierbar ist, ist V eine direkte Summe der Eigenräume von g. Für $v \in V_\lambda$ gilt

$$g(f(v)) = f(g(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v),$$

deshalb $f(v) \in V_\lambda$. Dann ist V_λ ein f-invarianter Unterraum und wir können $f|_{V_\lambda}\colon V_\lambda \to V_\lambda$ betrachten. Die Restriktion $f|_{V_\lambda}$ ist auch diagonalisierbar nach Aufgabe 3 aus Übungsblatt 5. Dann gibt es eine Basis von V_λ, die den Eigenvektoren von f entspricht. Die Elemente dieser Basis sind aber auch Eigenvektoren von g, da alle nicht trivialen Elemente von V_λ Eigenvektoren von g sind.

Da V eine direkte Summe der Eigenräume V_λ von g ist, können wir die obige Prozedur für alle V_λ durchführen und eine Basis von V konstruieren, die aus gleichzeitigen Eigenvektoren von f und g besteht.

Die andere Richtung ist trivial.