LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Sommersemester 2025
16. Juni 2025

Lineare Algebra II – Übungsblatt 7

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die Jordan-Normalform und eine Jordan-Basis der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $\chi_A(X)$ nur eine komplexe Nullstelle hat.

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper, $V = K[X]/(X-\lambda)^n$ für $\lambda \in K$ und $n \in \mathbb{N}$, und f der Endomorphismus von V induziert durch Multiplikation mit X. Bestimmen Sie die Jordan-Zerlegung von f, d.h. die Polynome $D(X)$, $N(X) \in K[X]$, so dass $f = D(f) + N(f)$, $D(f)$ diagonalisierbar und $N(f)$ nilpotent ist.

Aufgabe 3.
Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Sei $P(X) \in K[X]$, so dass $P(f)$ invertierbar ist.

1. Beweisen Sie, dass alle Primfaktoren von $P(X)$ koprim zu $\chi_f(X)$ sind.
2. Beweisen Sie, dass es $Q(X) \in K[X]$ gibt, so dass $P(f)^{-1} = Q(f)$.

Aufgabe 4.
Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f, g\colon V \to V$ diagonalisierbare Endomorphismen. Beweisen Sie, dass f und g dann und nur dann kommutieren, wenn sie gleichzeitig diagonalisierbar sind (d.h., es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass sowohl $[f]_{\mathcal{B}}$ als auch $[g]_{\mathcal{B}}$ diagonal sind).
Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 3 aus Übungsblatt 5 benutzen.