Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Wintersemester 2024/25
17. Juni 2025

Lineare Algebra II – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1.
Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein $\mathbb{R}$-Endomorphismus. Beweisen Sie, V hat einen nicht-trivialen f-invarianten Unterraum.

Lösung.
Sei $\chi_f(X) \in \mathbb{R}[X]$ das charakteristische Polynom von f. Dann hat $\chi_f(X)$ Grad $\deg \chi_f(X) = 3$, und deshalb gibt es eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ von $\chi_f(X)$. Mit anderen Worten λ ist ein Eigenwert von f. Sei $v \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $U := \langle v \rangle \leq V$ ein nicht-trivialer Unterraum, der f-invariant ist. In det Tat für $v \cdot \alpha \in U$ gilt $f(v\alpha) = f(v)\alpha = (v \cdot \lambda) \cdot \alpha \in U$.

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein K-Endomorphismus. Erinnern Sie sich daran, dass $V^\vee$ den Dualraum $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ bezeichnet und $f^\vee\colon V^\vee \to V^\vee$ eine lineare Form $g \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$ auf die Form $g \circ f$ abbildet.

1. Beweisen Sie, dass für ein Polynom $P(X) \in K[X]$, $P(f)^\vee = P(f^\vee)$ gilt.
2. Beweisen Sie, dass $\mu_{f^\vee}(X) = \mu_f(X)$ gilt.

Lösung.

1. Sei $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ für $a_i \in K$. Dann gilt für $g \in V^\vee$
$$(f^\vee)^i(g) = \underbrace{f^\vee(\dots f^\vee(f^\vee}_{i}(g))\dots) = g \circ \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{i} = g \circ f^i,$$
und deshalb
$$P(f)^\vee(g) = g \circ P(f) = g \circ \left(\sum_{i=0}^n a_i f^i\right) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot g \circ f^i = P(f^\vee)(g).$$

2. Es ist genug zu beweisen, dass $\mu_f(X) \mid \mu_{f^\vee}(X)$ und $\mu_{f^\vee}(X) \mid \mu_f(X)$. Es ist aber klar, dass $\mu_f(f^\vee) = \mu_f(f)^\vee = 0^\vee = 0$, und deshalb $\mu_{f^\vee}(X) \mid \mu_f(X)$.
   Sei $v \in V$ und $\mu_{f^\vee}(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Wir beweisen jetzt, dass $\mu_{f^\vee}(f)(v) = 0$.
   In der Tat, da $\mu_{f^\vee}(f^\vee) = 0$, haben wir, dass für jedes $g \in V^\vee$ gilt $\mu_{f^\vee}(f^\vee)(g) = 0$. Aber $\mu_{f^\vee}(f^\vee)(g) = \mu_{f^\vee}(f)^\vee(g) = g \circ \mu_{f^\vee}(f)$. Insbesondere gilt für jedes $g \in V^\vee$, dass $g \circ \mu_{f^\vee}(f)(v) = 0$. Dann gilt auch $\mu_{f^\vee}(f)(v) = 0$. In der Tat, wenn $\mu_{f^\vee}(f)(v) \neq 0$, können wir $\mu_{f^\vee}(f)(v)$ zu einer Basis $\{e_1 = \mu_{f^\vee}(f)(v), e_2, \dots, e_n\}$ ergänzen und eine Dualbasis $\{f_1, \dots, f_n\}$ betrachten. Dann gilt für $g = f_1$, dass $g \circ \mu_{f^\vee}(f)(v) = f_1(e_1) = 1 \neq 0$.
   Da $v \in V$ beliebig war, schließen wir, dass $\mu_{f^\vee}(f) = 0$, und somit $\mu_f \mid \mu_{f^\vee}$.

Aufgabe 3.
Sei K ein Körper, $V := K[X]/X^n$ für $n \geq 2$ und $f\colon V \to V$ der Endomorphismus, der durch Multiplikation mit X induziert wird. Beweisen Sie, dass (V, f) nicht halbeinfach ist.

Lösung.
Sei $U = \mathrm{Ker}(f) \leq V$ ein f-invarianter Unterraum von V. Beachten Sie, dass für $P(X) \in K[X]$ eine Klasse $[P(X)] \in V = K[X]/X^n$ zu U gehört, wenn und nur wenn $X^n \mid XP(X)$, bzw. wenn und nur wenn $X^{n-1} \mid P(X)$. Mit anderen Worten $U = X^{n-1}K[X]/X^n$ und $V/U \cong K[X]/X^{n-1}$. Nehmen wir an, dass V halbeinfach ist. Dann gibt es einen f-invarianten Unterraum $W \leq V$, so dass $V = U \oplus W$. Insbesondere gilt $W \cong V/U \cong K[X]/X^{n-1}$ und $f|W$ entspricht dem durch Multiplikation mit X induzierten Endomorphismus unter dieser Identifikation. Aber dann $\mu_{f|_W}(X) = X^{n-1}$ nach Aufgabe 2 von Tutoriumsblatt 3 und $f|U = 0$. Deshalb $\mu_{f|_U}(X) = X$. Da $V = U \oplus W$, schließen wir, dass $\mu_f = \mathrm{kgV}(\mu_{f|_U}, \mu_{f|_W}) = x^{n-1}$ (vgl. Aufgabe 2 vom Tutoriumsblatt 2), aber $\mu_f(X) = X^n$ nach Aufgabe 2 von Tutoriumsblatt 3. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Ahnnahme falsch war.

Aufgabe 4.
Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein K-Endomorphismus.

1. Bestimmen Sie eine Bijektion zwischen den f-invarianten Unterräumen von V und $f^\vee$-invarianten Unterräumen von $V^\vee$.
2. Nehmen Sie an, dass $(V,\, f)$ einfach ist. Beweisen Sie, dass $(V^\vee, f^\vee)$ auch einfach ist.

Lösung.

1. Sei $U \leq V$ ein invarianter Unterraum und definieren wir

   $$U^\perp := \{g \in V^\vee \mid g|_U = 0\} = \{g\colon V \to K \mid \forall\, u \in U \quad g(u) = 0\}.$$

   Dann ist $U^\perp \leq V^\vee$ ein $f^\vee$-invarianter Unterraum. In der Tat für $u \in U$ gilt $f^\vee(g)(u) = g(f(u)) = 0$, weil $f(u) \in U$.

   Erinnern wir uns daran, dass $U \xrightarrow{\cong} (U^\vee)^\vee$, und $(U^\perp)^\perp$ entspicht $U' := \{v \in V \mid \forall\, g \in U^\perp \quad g(v) = 0\}$. Es ist klar, dass U eine Teilmenge von U' ist, aber auch für $w \notin U$ gilt $w \notin U'$.

   In der Tat sei $\{u_i\}$ ist eine Basis von U. Dann sind $\{u_i\} \cup \{w\}$ linear unabhängig und deshalb gibt es $v_i \in V$, so dass $\{u_i\} \cup \{w\} \cup \{v_i\}$ eine Basis von V ist. Dann definieren wir $g \in U^\perp$ durch $g(u_i) = 0$, $g(w) = 1$, $g(v_i) = 0$ und, da $g(w) \neq 0$, schließen wir, dass $w \notin U'$.

   Mit anderen Worten $U' = U$. Insbesondere für U_1, U_2 invariante Unterräume von V mit $(U_1)^\perp = (U_2)^\perp$ schließen wir $U_1 = U_2$. Dann ist die mengen-theoretische Abbildung $U \mapsto U^\perp$ zwischen invarianten Unterräumen von V und $V^\vee$ injektiv.

   Auch für einen $f^\vee$-invarianten Unterraum W von $V^\vee$ schließen wir, dass $W^{\perp\perp}$ von einem $f^{\vee\vee}$-invarianten Unterraum $W^\perp \leq V^{\vee\vee}$ kommt, und deshalb $W = U^\perp$ für einen entsprechenden f-invarianten Unterraum U von V. Dann ist die Abbildung $U \mapsto U^\perp$ auch surjektiv.
2. Da es keinen nicht-trivialen f-invarianten Unterräumen von V gibt, gibt es auch keinen $f^\vee$-invarianten Unterraum von $V^\vee$. Mit anderen Worten ist $(V^\vee,\, f^\vee)$ auch einfach.