



Prof. Dr. Fabien Morel

Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Sommersemester 2025

2. Juni 2025

Lineare Algebra II – Übungsblatt 6

Aufgabe 1.

Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein $\mathbb{R}$ -Endomorphismus. Beweisen Sie, V hat einen nicht-trivialen f -invarianten Unterraum.

Aufgabe 2.

Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein K -Endomorphismus. Erinnern Sie sich daran, dass $V^\vee$ den Dualraum $\text{Hom}_K(V, K)$ bezeichnet und $f^\vee: V^\vee \rightarrow V^\vee$ eine lineare Form $g \in \text{Hom}_K(V, K)$ auf die Form $g \circ f$ abbildet.

1. Beweisen Sie, dass für ein Polynom $P(X) \in K[X]$, $P(f)^\vee = P(f^\vee)$ gilt.
2. Beweisen Sie, dass $\mu_{f^\vee}(X) = \mu_f(X)$ gilt.

Aufgabe 3.

Sei K ein Körper, $V := K[X]/X^n$ für $n \geq 2$ und $f: V \rightarrow V$ der Endomorphismus, der durch Multiplikation mit X induziert wird. Beweisen Sie, dass (V, f) nicht halbeinfach ist.

Aufgabe 4.

Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein K -Endomorphismus.

1. Bestimmen Sie eine Bijektion zwischen den f -invarianten Unterräumen von V und $f^\vee$ -invarianten Unterräumen von $V^\vee$.
2. Nehmen Sie an, dass (V, f) einfach ist. Beweisen Sie, dass $(V^\vee, f^\vee)$ auch einfach ist.