



Prof. Dr. Fabien Morel

Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Wintersemester 2024/25

5. Juni 2025

Lineare Algebra II – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 5

Aufgabe 1.

Sei K ein Körper, V ein 2-dimensionaler K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein K -Endomorphismus. In Abhängigkeit des charakteristischen und des Minimalpolynoms von f beschreiben Sie alle f -invarianten Unterräume U von V , d.h. alle K -Unterräume, so dass $f(U) \subseteq U$.

Lösung.

Nehmen wir zuerst an, dass $\chi_f(X) = (X - a)(X - b)$ für $a \neq b$. Dann hat V eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, die aus Eigenvektoren von f besteht, d.h. $A := [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Wenn U ein invarianter Unterraum von V ist und es $u = v_1x + v_2y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$ gibt, so dass $x \neq 0$ und $y \neq 0$, schließen wir auch, dass $f(u) = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix} \in U$, da U invariant ist, und, dass $ua, ub \in U$, da U ein Unterraum ist. Deshalb haben wir $v_2 = \frac{1}{(b-a)y}(f(u) - ua) \in U$ und $v_1 = \frac{1}{(a-b)x}(f(u) - ub) \in U$, d.h. $U = V$.

Wenn U ein invarianter Unterraum von V ist und es kein $u = v_1x + v_2y \in U$ gibt, so dass $x \neq 0$ und $y \neq 0$, dann ist U entweder 0 oder U wird durch v_1 oder v_2 erzeugt. Alle diese 3 Unterräume sind invariant. Deshalb gibt es in diesem Fall nur 4 invariante Unterräume: 0, $\langle v_1 \rangle$, $\langle v_2 \rangle$, V .

Nehmen wir zunächst an, dass $\chi_f(X) = (X - a)^2$. Dann entweder $\mu_f(X) = X - a$, oder $\mu_f(X) = (X - a)^2$. Im ersten Fall schließen wir, dass $f = a \cdot \text{id}_V$, und deshalb sind alle Unterräume von V invariant. Insbesondere gibt es unendlich viel invariante Unterräumen.

Im zweiten Fall gibt es einen Eigenvektor v von f , d.h. $f(v) = av$, und sei $w \in V$ ein Vektor, der linear unabhängig von v ist. Dann ist $\mathcal{B} = \{v, w\}$ ein Basis von V und $A := [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ für $b, c \in K$. Da $\chi_A(X) = (X - a)(X - c) = (X - a)^2$, schließen wir, dass $c = a$. Außerdem ist $b \neq 0$, da $\mu_{a \cdot \text{id}_V}(X) = X - a$. Sei U ein invarianter Unterraum von V , so dass es $u = vx + wy \in U$ gibt mit $y \neq 0$. Dann $\frac{1}{by}(f(u) - au) = v \in U$ und $w = \frac{1}{y}(u - vx) \in U$, so dass $U = V$. Wenn es kein $u = vx + wy \in U$ gibt mit $y \neq 0$, dann entweder $U = 0$ oder $U = \langle v \rangle$. Diese zwei Unterräume sind invariant. Deshalb gibt es 3 invariante Unterräume in diesem Fall: 0, $\langle v \rangle$, und V .

Zum Schluß nehmen wir an, dass $\chi_f(X)$ irreduzibel ist. Dann hat f keine Eigenvektoren. Insbesondere, wenn $U \leq V$ invariant ist und $u \in U \setminus 0$, dann $f(u) \notin \langle u \rangle$, d.h., u und $f(u)$ sind linear unabhängig und $U \supseteq \langle u, f(u) \rangle = V$. Deshalb gibt es 2 invariante Unterräumen in diesem Fall: 0 und V .

Aufgabe 2.

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein K -Endomorphismus. Nehmen Sie an, dass V keinen nicht-trivialen f -invarianten Unterraum hat. Beweisen Sie, dass V zyklisch

ist, und, dass das charakteristische Polynom von f irreduzibel ist.

Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 1, 2 und 4 von Tutoriumsblatt 3 benutzen.

Lösung.

Sei $v \in V \setminus 0$ und betrachten wir $U := \langle v, f(v), f^2(v), \dots \rangle \leq V$. Es ist klar, dass U invariant ist und $U \ni v \neq 0$. Dann nach Annahme $U = V$ und nach Aufgaben 1 und 2 aus Tutoriumsblatt 3 schließen wir, dass $V \cong K[X]/P(X)$ als $K[X]$ -Modul, wo $P(X) = \chi_f(X) = \mu_f(X)$.

Sei $P(X)$ reduzibel und zerlegen wir $P(X) = \prod_{i=1}^n Q_i(X)^{n_i}$ in $Q_i(X)$ irreduzible paarweise koprimale Polynome. Wenn $n > 1$, sei $P_1(X) := Q_1(X)^{n_1}$ und $P_2(X) := \prod_{i=2}^n Q_i(X)^{n_i}$. Dann sind $P_1(X)$ und $P_2(X)$ koprim und $V = \text{Ker } P_1(f) \oplus \text{Ker } P_2(f)$. Beachten Sie, dass $V \neq \text{Ker } P_i(f)$, weil $P(X)$ sonst kein Minimalpolynom wäre, und $\text{Ker } P_i(f)$ invariant ist. Dann hat V einen nicht-trivialen invarianten Unterraum.

Somit $n = 1$ und $P(X) = Q_1(X)^{n_1}$. Beachten Sie, dass, wenn $\text{Ker } Q_1(f) = 0$, gilt auch $\text{Ker } Q_1(f)^i = 0$ für jedes i . In der Tat, wenn $0 = Q_1(f)^i(v) = Q_1(f)(Q_1(f)^{i-1}(v))$ für $v \in V$, schließen wir $Q_1(f)^{i-1}(v) = 0$ und nach Induktion, $v = 0$. Aber $\text{Ker } Q_1(f)^{n_1} = V$. Wegen $V \neq 0$ ist es unmöglich, dass $\text{Ker } Q_1(f) = 0$. Aber $\text{Ker } Q_1(f)$ ist ein invarianter Unterraum und deshalb $\text{Ker } Q_1(f) = V$. Aber, da $P(X)$ ein Minimalpolynom ist, schließen wir, dass $n_1 = 1$.

Aufgabe 3.

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein K -Endomorphismus. Für einen f -invarianten Unterraum $U \subseteq V$ bezeichnen wir $g := f|_U: U \rightarrow U$.

1. Beweisen Sie, wenn f diagonalisierbar ist, ist auch g diagonalisierbar.
2. Beweisen Sie, wenn f triagonalisierbar ist, ist auch g triagonalisierbar.

Lösung.

1. Wie Sie aus der Vorlesung wissen, ist f diagonalisierbar, wenn und nur wenn $\mu_f(X)$ ein Produkt Grad 1 Faktoren ist und quadratfrei ist. Aber $\mu_g(X) \mid \mu_f(X)$ und deshalb muss $\mu_g(X)$ auch ein Produkt von Grad 1 Faktoren und quadratfrei sein. Daraus schließen wir, dass g diagonalisierbar ist.
2. Wie Sie aus der Vorlesung wissen, ist f triagonalisierbar, wenn und nur wenn $\mu_f(X)$ ein Produkt Grad 1 Faktoren ist. Aber $\mu_g(X) \mid \mu_f(X)$ und deshalb muss $\mu_g(X)$ auch ein Produkt Grad 1 Faktoren sein. Daraus schließen wir, dass g triagonalisierbar ist.

Aufgabe 4.

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein K -Endomorphismus. Für einen f -invarianten Unterraum $U \subseteq V$ bezeichnen wir $g := f|_U: U \rightarrow U$, $W := V/U$ und $h: W \rightarrow W$ den Endomorphismus von W , der durch f induziert wird.

- Beweisen Sie, dass $\mu_h(X) \mid \mu_f(X)$.
- Geben Sie ein Beispiel von V , f und U an, so dass $\mu_h(X) = \mu_f(X)$ bzw. $\mu_h(X) \neq \mu_f(X)$.

Bemerkung: Erinnern Sie sich, dass $\chi_f(X) = \chi_g(X) \cdot \chi_h(X)$ nach Aufgabe 4 von Tutoriumsblatt 12 aus Lineare Algebra I.

Lösung.

1. Da $\mu_f(f) = 0$, schließen wir, dass auch $\mu_f(h) = 0$, und deshalb $\mu_f(X) \mid \mu_f(X)$.
 2. Betrachten wir $V = K \oplus K$, $U = K \oplus 0$ und $f = \text{id}_V$. Dann $\mu_h(X) = \mu_f(X) = X - 1$.
- Betrachten wir als Nächstes $V = K \oplus K$, $U = K \oplus 0$ und $f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann $\mu_f(X) = (X - 1)^2$, aber $U \cong K$ und $\mu_h(X)$ hat Grad 1.