



Lineare Algebra II – Übungsblatt 5

Aufgabe 1.

Sei K ein Körper, V ein 2-dimensionaler K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein K -Endomorphismus. In Abhängigkeit des charakteristischen und des Minimalpolynoms von f beschreiben Sie alle f -invarianten Unterräume U von V , d.h. alle K -Unterräume, so dass $f(U) \subseteq U$.

Aufgabe 2.

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum, und $f: V \rightarrow V$ ein K -Endomorphismus. Nehmen Sie an, dass V keinen nicht-trivialen f -invarianten Unterraum hat. Beweisen Sie, dass V zyklisch ist, und, dass das charakteristische Polynom von f irreduzibel ist.

Hinweis: Sie dürfen Aufgaben 1, 2 und 4 von Tutoriumsblatt 3 benutzen.

Aufgabe 3.

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein K -Endomorphismus. Für einen f -invarianten Unterraum $U \subseteq V$ bezeichnen wir $g := f|_U: U \rightarrow U$.

1. Beweisen Sie, wenn f diagonalisierbar ist, ist auch g diagonalisierbar.
2. Beweisen Sie, wenn f triagonalisierbar ist, ist auch g triagonalisierbar.

Aufgabe 4.

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein K -Endomorphismus. Für einen f -invarianten Unterraum $U \subseteq V$ bezeichnen wir $g := f|_U: U \rightarrow U$, $W := V/U$ und $h: W \rightarrow W$ den Endomorphismus von W , der durch f induziert wird.

- Beweisen Sie, dass $\mu_h(X) \mid \mu_f(X)$.
- Geben Sie ein Beispiel von V , f und U , so dass $\mu_h(X) = \mu_f(X)$ bzw. $\mu_h(X) \neq \mu_f(X)$.

Bemerkung: Erinnern Sie sich, dass $\chi_f(X) = \chi_g(X) \cdot \chi_h(X)$ nach Aufgabe 4 von Tutoriumsblatt 12 aus Lineare Algebra I.