LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Sommersemester 2025
19. Mai 2025

Lineare Algebra II – Übungsblatt 4

Aufgabe 1.
Sei $V = \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ der endlich dimensionale Vektorraum aller Polynome $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad $\deg P(X) \leq n$. Sei $f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} \colon V \to V$ der Endomorphism von V, der $P(X)$ auf $\frac{\mathrm{d}P(X)}{\mathrm{d}X}$ abbildet. Finden Sie das charakteristische Polynom $\chi_f(X)$ und das Minimalpolynom $\mu_f(X)$.

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper und $P(X) \in K[X]$ ein Polynom. Geben Sie für jedes Paar natürlicher Zahlen $0 < i \leq n$ ein Beispiel eines K-Vektorraums V und eines K-Endomorphismus $f \colon V \to V$ an, so dass $\chi_f(X) = P(X)^n$ und $\mu_f(X) = P(X)^i$.
Hinweis: Sie dürfen von Tutoriumsblatt 3 Aufgabe 2 benutzen, dass für $V := K[X]/P(X)$ und f induziert durch die Multiplikation mit X gilt $\chi_f(X) = \mu_f(X) = P(X)$.

Aufgabe 3.
Erinnern Sie sich daran, dass ein Element $m \in M$ eines R-Moduls M über einer Intergritätsbereich R Torsionselement heißt, wenn es $r \in R \setminus 0$ gibt, so dass $rm = 0$. Erinnern Sie sich auch daran, dass ein R-Modul M ein Torsionsmodul heißt, wenn jedes Element von M ein Torsionselement ist.

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, f ein K-Endomorphismus von V und betrachten Sie die induzierte $K[X]$-Modul Struktur auf V.

1. Beweisen Sie, dass V ein Torsionsmodul ist, wenn und nur wenn für jedes $v \in V$ der Vektorraum, der mit der Menge $\{v, f(v), f^2(v), \ldots\}$ erzeugt wird, endlich dimensional ist.
2. Beweisen Sie, dass V endlich dimensional über K ist, wenn und nur wenn V ein Torsionsmodul ist, der als $K[X]$-Modul endlich erzeugt wird.

Aufgabe 4.
Sei K ein Körper, $P(X) \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom, und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Betrachten Sie einen K-Endomorphismus $f \colon V \to V$, so dass $P(f)^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $\chi_f(X) = P(X)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.