LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Sommersemester 2025
12. Mai 2025

Lineare Algebra II – Übungsblatt 3

Aufgabe 1.
Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, so dass $f^2 = -\mathrm{Id}_V$.

1. Nehmen wir an, dass $\dim V$ ungerade ist. Beweisen Sie, dass es $\lambda \in K$ gibt, so dass $\lambda^2 = -1$.
2. Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $\dim V$ gerade ist.
3. Sei $K = \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass f diagonalisierbar ist.
   Hinweis: Benutzen Sie $1 = \frac{i}{2}(X-i) - \frac{i}{2}(X+i)$, um zu beweisen, dass jedes Element $v \in V$ eine Summe der Eigenvektoren von f ist, die zu i oder $-i$ gehören.

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ alle Eigenwerte von f, so dass $\lambda_i = \lambda_j \Rightarrow i = j$. Berechnen Sie das minimale Polynom $\mu_f(X)$ von f.

Aufgabe 3.
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, K ein Körper und $a \in K \setminus K^p = K \setminus \{x^p \mid x \in K\}$. Beweisen Sie, dass $X^p - a$ irreduzibel in $K[X]$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie einen Faktor $Q(X)$ von $X^p - a$ und $V := K[X]/Q(X)$.

Aufgabe 4.
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, L ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ und $\sigma\colon L \to L$ ein nicht-trivialer Körperautomorphismus, so dass $\sigma^p = \mathrm{Id}_L$. Sei

$$K := \{x \in L \mid \sigma(x) = x\},$$

und nehmen Sie an, dass $\zeta := e^{2\pi i/p} \in \mathbb{C}$ zu K gehört.

1. Beweisen Sie, dass K ein Unterkörper von L ist.
2. Betrachten Sie σ als K-Endomorphismus von L und beweisen Sie, dass jedes $x \in L$ eine Summe der Eigenvektoren von σ ist, die zu ζ^i, $i = 0, \ldots, p-1$ gehören.
   Hinweis: Benutzen Sie Polynome $P_j(X) := \prod_{i \neq j}(X - \zeta^i)$ und argumentieren Sie ähnlich wie in Aufgabe 1 (3).
3. Beweisen Sie, dass $\dim_K L = p$.
   Hinweis: Beweisen Sie, dass es einen Eigenvektor $v \in L \setminus K$ gibt und betrachten Sie die Multiplikation mit v.
4. Beweisen Sie, dass es $a \in K$ gibt, so dass $L \cong K[X]/(X^p - a)$ als Körper.