



Prof. Dr. Fabien Morel

Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Sommersemester 2025

5. Mai 2025

Lineare Algebra II – Übungsblatt 2

Aufgabe 1.

1. Bestimmen Sie die Menge $\mathbb{Z}[i]^\times$ aller Einheiten des Gaußschen Zahlrings $\mathbb{Z}[i]$.

Hinweis. Beweisen Sie zuerst, dass für jede Einheit $u \in \mathbb{Z}[i]^\times$ gilt $N(u) = 1$, wobei N wie in Aufgabe 3 von Übungsblatt 1 ist.

2. Beweisen Sie dass für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- a) p ist die Summe zweier Quadrate, d.h., es gibt ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $p = a^2 + b^2$;
- b) p ist als Element von $\mathbb{Z}[i]$ reduzibel.

Aufgabe 2.

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass $2^n + 1$ eine Primzahl ist. Beweisen Sie, dass $n = 2^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Hinweis. Faktorisieren Sie $n = 2^m \cdot k$ für k ungerade.

Aufgabe 3.

Sei K ein Körper, $n, d \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(K)$, so dass $A^d = 0$.

1. Beweisen Sie, dass $A^n = 0$.

Hinweis. Benutzen Sie das Minimalpolynom $\mu_A(X)$ von A .

2. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(X) \in K[X]$ von A .

Hinweis. Sie dürfen benutzen, dass es einen algebraisch abgeschlossen Körper E gibt, so dass K ein Unterkörper von E ist.

Aufgabe 4.

1. Beweisen Sie, dass der Quotientring $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$ isomorph zu $\mathbb{Z}[i]$ ist.
2. Beweisen Sie, dass für eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ der Quotientring $\mathbb{Z}[i]/n\mathbb{Z}[i]$ isomorph zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X]/(X^2 + 1)$ ist.
3. Beweisen Sie dass für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - a) p ist die Summe zweier Quadrate, d.h., es gibt ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $p = a^2 + b^2$;
 - b) -1 ist ein Quadrat modulo p , d.h., es gibt $c \in \mathbb{Z}$, so dass $c^2 \equiv -1 \pmod{p}$.