



Prof. Dr. Fabien Morel

Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs, Katharina Novikov

Sommersemester 2025

28. April 2025

Lineare Algebra II – Übungsblatt 1

Aufgabe 1.

Betrachten Sie die folgenden Polynome $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ und dividieren Sie jeweils f mit Rest durch g .

1. $f(x) = x^6 + 3x^4 + x^3 - 2$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$;
2. $f(x) = x^n - 1$, $g(x) = x - 1$, mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 2.

1. Sei K ein Körper und $f(x) \in K[x]$ ein Polynom vom Grad höchstens 3. Beweisen Sie, dass $f(x)$ irreduzibel ist, wenn und nur wenn $f(x)$ keine Nullstelle in K hat.
2. Geben Sie ein Beispiel eines Polynoms $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad 4 an, das keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ hat, aber reduzibel ist.

Aufgabe 3.

Erinnern Sie sich, dass die Menge

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist (i ist die imaginäre Einheit). Dieser Ring heißt der Ring der gaußschen Zahlen oder Gaußscher Zahlring. Für $x = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ setzt man $N(x) = |x|^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}$, wobei $|\cdot|$ die komplexe Norm ist.

Beweisen Sie, dass man gaußsche Zahlen mit Rest dividieren kann, d.h., für $x \in \mathbb{Z}[i]$, $y \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ gibt es $q, r \in \mathbb{Z}[i]$, so dass

$$x = y \cdot q + r \quad \text{und} \quad N(r) < N(y).$$

Mit anderen Worten beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ ist ein euklidischer Ring mit euklidische Normfunktion N ist.

Hinweis: Dividieren Sie zuerst x durch y als komplexe Zahlen.

Aufgabe 4.

Sei $R = \mathbb{Z}[t]$ und $I = \{f(t) \mid f(0) \in 2\mathbb{Z}\} \subseteq R$ die Teilmenge aller Polynome mit geradem Absolutglied.

Beweisen Sie, dass I ein Ideal von R , aber kein Hauptideal ist. Mit anderen Worten es gibt kein Element $f_0(t) \in I$, das I als Ideal von R erzeugt.