



Prof. Dr. Fabien Morel

Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25

6. Februar 2025

Lineare Algebra I – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 13

Aufgabe 1.

Berechnen Sie das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

Berechnen wir zuerst das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E - A)$:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 5 & 0 & -7 \\ -6 & \lambda - 2 & 6 \\ 4 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda + 5 & -7 \\ 4 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1).$$

Deshalb sind die Eigenwerte von A gleich 2 und -1 . Als nächstes bestimmen wir die zugehörigen Eigenvektoren.

Dafür lösen wir das Gleichungssystem $(A - 2E)X = 0$. Offensichtlich hat dieses Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

die Lösungsmenge $V_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Das zweite zu lösende Gleichungssystem

$(A + E)X = 0$ lautet ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Wir schließen $x_1 = \frac{7}{4}x_3$ und $x_2 = 2(x_3 - x_1) = -\frac{3}{2}x_3$. Mit anderen Worten $V_{-1}(A) =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{4}x_3 \\ -\frac{3}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

Lösung.

Berechnen wir zuerst das charakteristische Polynom von M_a :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -a \\ -a & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 - a).$$

Offensichtlich hat für $a < 0$ die Gleichung $(\lambda - 1)^2 = a$ keine reelle Lösung, d.h., das Polynom $(\lambda - 1)^2 - a$ ist über $\mathbb{R}$ irreduzibel. Aber das charakteristische Polynom einer diagonalen Matrix ist immer das Produkt von Faktoren vom Grad 1. Mit anderen Worten M_a ist über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar für $a < 0$.

Nehmen wir weiter an, dass $a > 0$. Dann hat

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 1 - \sqrt{a})(\lambda - 1 + \sqrt{a})$$

drei verschiedene Nullstellen und somit hat M_a drei linear unabhängige Eigenvektoren, die zu den verschiedenen Eigenwerten gehören. Dann ist die Matrix von M_a diagonal in der Basis dieser Eigenvektoren.

Zum Schluss nehmen wir an, dass $a = 0$. In diesem Fall gilt $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^3$, d.h., M_0 hat den Eigenwert $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 3. Die Eigenwerte hängen aber nicht von der Wahl der Basis ab, d.h., wenn M_0 diagonalisierbar ist, kann sie nur die Diagonalmatrix E in irgendeiner Basis sein. Der Identitätsendomorphismus hat jedoch in jeder Basis die Matrix E , d.h., M_0 kann nicht diagonalisierbar sein.

Aufgabe 3.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, so dass die darstellende Matrix von φ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ gegeben sei durch:

$$M := M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Zeigen Sie, 2 ist ein Eigenwert von φ .
2. Geben Sie eine Basis von $V_2(\varphi)$ an.
3. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{\varphi}(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_3 - M)$.
4. Zeigen Sie, dass, wenn $a \leq 0$, 2 der einzige Eigenwert von φ ist.
5. Zeigen Sie, dass, wenn $a > 0$, φ genau drei verschiedene Eigenwerte hat.
6. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, wann φ diagonalisierbar ist.
7. Sei nun $a \in \mathbb{Q}$. Wir betrachten M als Element in $M_3(\mathbb{Q})$ und bezeichnen mit $\Phi: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ die $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung, so dass die darstellende Matrix von Φ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{Q}^3$ die Matrix M ist. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{Q}$, wann Φ diagonalisierbar ist.

Lösung.

1. Offensichtlich

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & -1 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d.h., 2 ist eine Nullstelle von $\det(\lambda \cdot E - M)$.

2. Die Lösungsmenge des Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

ist gegeben durch $V_2(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} -ax_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$. Es hat eine Basis $\left\{ \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3.

$$\chi_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -a & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -a & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3 - 2a(\lambda - 2) = (\lambda - 2)((\lambda - 2)^2 - 2a).$$

4. Für $a < 0$ ist die Gleichung $(\lambda - 2)^2 = 2a$ nicht lösbar für reelle λ , d.h., $\chi_\varphi(\lambda) = 0$ hat die eine Lösung $\lambda = 2$. Für $a = 0$ haben wir $\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^3$. Deshalb ist wieder $\lambda = 2$ die einzige Nullstelle von χ_φ .

5. Für $a > 0$ haben wir

$$\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 2 - \sqrt{2a})(\lambda - 2 + \sqrt{2a}),$$

d.h., φ hat drei verschiedene Eigenwerte: $2, 2 \pm \sqrt{2a}$.

6. Für $a \leq 0$ hat φ einen Eigenwert $\lambda = 2$. Die Eigenwerte hängen aber nicht von der Wahl der Basis ab, d.h., wenn φ diagonalisierbar ist, kann sie nur die Diagonalmatrix $2 \cdot E$ in irgendeiner Basis haben. Dies ist nur möglich, wenn $\varphi = 2 \cdot \text{id}$, aber der Identitätsendomorphismus hat in jeder Basis die Matrix E , d.h., φ kann nicht diagonalisierbar sein.

Für $a > 0$ hat φ drei verschiedene Eigenwerte und deshalb hat φ auch drei linear unabhängige Eigenvektoren, die zu den verschiedenen Eigenwerten gehören. Dann ist die Matrix von φ diagonal in der Basis dieser Eigenvektoren.

7. Wenn Φ über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist, ist φ auch über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. Daraus schließen wir, dass für $a \leq 0$ die Abbildung Φ nicht diagonalisierbar ist.

Wenn $a > 0$ ist, ist das Polynom $(\lambda - 2)^2 - 2a$ über $\mathbb{Q}$ reduzibel, wenn und nur wenn $2 \pm \sqrt{2a}$ rationale Zahlen sind, d.h., wenn und nur wenn $2a$ ein Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Für $2a$ ein Quadrat einer rationalen Zahl hat Φ drei verschiedene Eigenwerte und deshalb hat Φ auch drei linear unabhängige Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören. Dann ist die Matrix von Φ diagonal in der Basis dieser Eigenvektoren.

Für $2a$ kein Quadrat einer rationalen Zahl ist das charakteristische Polynom von Φ kein Produkt von Faktoren vom Grad 1, mit anderen Worten Φ ist über $\mathbb{Q}$ nicht diagonalisierbar.