Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
30. Januar 2025

Lineare Algebra I – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 12

Aufgabe 1.
Finden Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Lösung.
Erinnern wir uns daran, dass die Egenwerte der Matrix A die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A von A sind. Deshalb müssen wir zuerst χ_A berechnen:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 - 4)(\lambda + 3) - 3 + 2(\lambda + 3) + 5(\lambda + 2) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3.$$

Die eizige Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$ ist $\lambda = -1$, d.h., A hat einen Eigenwert $\lambda = -1$.

Aufgabe 2.
Sei $a \in \mathbb{R}$ und $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Finden Sie das charakteristische Polynom von M_a.
2. Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ M_a über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.
3. Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ M_a über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

Lösung.

1. Nach Definition haben wir

$$\chi_{M_a}(\lambda) = \det(\lambda E - M_a) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - a.$$

2. Erinnern wir uns daran, dass eine Matrix A diagonalisierbar heißt, wenn es eine Basis gibt, sodass A in dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

   Es ist klar, dass das charakteristische Polynom einer Diagonalmatrix mindestens eine Nullstelle hat, aber das charakteristische Polynom hängt nicht von der Wahl einer Basis ab. Daher hat das charakteristische Polynom einer diagonalisierbaren Matrix auch mindestens eine Nullstelle. Insbesondere hat das charakteristische Polynom χ_{M_a} für $a < 0$ keine Nullstellen, daher ist die Matrix M_a nicht diagonalisierbar.

Wie Sie schon aus der Vorlesung wissen, wenn die Matrix $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ hat, können die Eigenvektoren v_1 zu $\lambda 1$ und v_2 zu λ_2 nicht proportional sein, so dass $\{v_1, v_2\}$ eine Basis des $\mathbb{K}^2$ ist, und A in dieser Basis diagonal ist. Insbesondere hat das charakteristische Polynom χ_{M_a} für $a > 0$ zwei verschiedene Nullstellen, daher ist die Matrix M_a diagonalisierbar.

Zum Schluss sei $a = 0$. In diesem Fall, hat die Matrix M_0 nur einen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Eigenwerte hängen aber nicht von der Wahl der Basis ab, d.h., wenn M_0 diagonalisierbar ist, kann sie nur gleich E sein. Der Identitätsendomorphismus hat jedoch in jeder Basis die Matrix E, d.h., M_0 kann nicht diagonalisierbar sein.

Die Antwort: M_a ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ für $a > 0$ und nicht diagonalisierbar für $a \leq 0$.

3. Ähnlich wie bei "2." schließen wir, dass M_0 nicht diagonalisierbar über $\mathbb{C}$ ist.

   Aber für $a \neq 0$ hat das charakteristische Polynom von M_a zwei verschiedene komplexe Nullstellen. Dann schließen wir ähnlich wie bei "2.", dass M_a in diesem Fall diagonalisierbar ist.

   Die Antwort: M_a ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$ für $a \neq 0$ und nicht diagonalisierbar für $a = 0$.

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden $\mathbb{R}$-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

Lösung.
Berechnen wir zuerst das charakteristische Polynom von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(-A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda^2-\lambda-2+2) = (\lambda-2)^2(\lambda-1)\lambda.$$

Deshalb hat A Eigenwerte 2, 1 und 0. Finden wir zunächst die zugehörigen Eigenräume.

Erinnern wir uns daran, dass der Eigenraum, der zum Eigenwert λ gehört, der Unterraum aller Lösungen des Gleichungssystem $(A - \lambda E)X = 0$ ist.

Für $\lambda = 2$ haben wir

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

und deshalb $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_2 = 0$ und x_3 kann beliebig sein. Mit anderen Worten: der Eigenraum, der zum Eigenwert 2 gehört, ist eindimensional und wird vom Standard-Basisvektor e_3 erzeugt.

Für $\lambda = 1$ haben wir

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

und deshalb $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = -2x_4$ und x_4 kann beliebig sein. Mit anderen Worten: der Eigenraum, der zum Eigenwert 1 gehört, ist eindimensional und wird vom Vektor $2e_2 - e_4$ erzeugt.

Für $\lambda = 0$ haben wir $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = -x_4$ und x_4 kann beliebig sein. Mit anderen Worten: der Eigenraum, der zum Eigenwert 0 gehört, ist auch eindimensional und wird vom Vektor $e_2 - e_4$ erzeugt.

Das charakteristische Polynom hängt nicht von der Wahl der Basis ab, also wenn A diagonalisierbar ist, hat sie die Form $\operatorname{diag}(2, 2, 1, 0)$ in irgendeiner Basis. Insbesondere muss der Eigenraum, der zum Eigenwert 2 gehört, die Dimension 2 haben. Aber wir haben schon bewiesen, dass er Dimension 1 hat. Mit anderen Worten A kann nicht diagonalisierbar sein.

Aufgabe 4.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus von V, und $U \leq V$ ein Unterraum von V, so dass $f(U) \subseteq U$.

1. Beweisen Sie, dass $\overline{f}\colon V/U \to V/U$ wohldefiniert ist.
2. Beweisen Sie, dass $\chi_f = \chi_{f|_U} \times \chi_{\overline{f}}$.

Lösung.

1. Wir müssen überprüfen, ob die Abbildung $\overline{f}\colon V/U \to V/U$, die die Äquivalenzklasse $\overline{v} \in V/U$ des Vektors $v \in V$ auf die Klasse $\overline{f(v)}$ abbildet, wohldefiniert ist. Mit anderen Worten für $v' \in V$, der zu v äquivalent ist, müssen wir überprüfen, ob $f(v')$ äquivalent zu $f(v)$ ist. Da v' äquivalent zu v ist, haben wir $v' - v \in U$, aber $f(U) \subseteq U$, insbesondere gehört $f(v') - f(v) = f(v' - v)$ wieder zu U. Mit anderen Worten ist $f(v')$ in der Tat äquivalent $f(v)$.
2. Sei $v_1, \dots, v_m$ eine Basis von U. Ergänzen wir sie zu einer Basis $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ von V und sei $W := \langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle$.

   Da $f(U) \subseteq U$, haben wir $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$ für $j \leq m$. Mit anderen Worten die Matrix von f in der Basis $v_1, \dots, v_n$ hat die Form

   $$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

   für $A \in \mathrm{M}_m(K)$, $B \in \mathrm{M}_{m,n-m}(K)$ und $C \in \mathrm{M}_{n-m}(K)$. Wie Sie schon aus der Vorlesung wissen,

   $$\chi_f(\lambda) = \chi_M(\lambda) = \det(\lambda E - M) = \det(\lambda E - A) \cdot \det(\lambda E - C) = \chi_A(\lambda) \cdot \chi_C(\lambda).$$

   Es ist klar, dass A die Matrix von $f|_U$ in der Basis $v_1, \dots, v_m$ ist, deshalb haben wir $\chi_A = \chi_{f|_U}$.

   Erinnern wir uns daran, dass die kanonische Projektion $g\colon V \to V/U$ surjektiv ist und Kern $\operatorname{Ker}(g) = U$ hat (vgl. Lösung der Aufgabe 3 aus Übungsblatt 8), und $\dim(V/U) + \dim(U) = \dim(V)$. Dann ist $g|_W\colon W \to V/U$ auch surjektiv und $\dim(W) = \dim(V/U)$. Deshalb ist $g|W$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\overline{v}_{m+1}, \dots, \overline{v}_n$ eine Basis von V/U. Außerdem ist die Matrix von $\overline{f}$ in dieser Basis offensichtlich C, insbesondere, $\chi_{\overline{f}} = \chi_C$.