



Prof. Dr. Fabien Morel

Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25

16. Januar 2025

Lineare Algebra I – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 10

Aufgabe 1.

Untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme darauf, ob sie eindeutig lösbar über $\mathbb{R}$ sind:

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix};$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

1. Um das lineare Gleichungssystem 1. zu analysieren, bringen wir die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ in eine Zeilenstufenform. Dafür wenden wir das gaußsche Eliminationsverfahren an:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \mapsto r_2 - 4r_1 \\ r_3 \mapsto r_3 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - \frac{2}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Da $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \neq 0$, schließen wir, dass auch $\det A \neq 0$. Aber dann ist A invertierbar und das Gleichungssystem $AX = B$ hat immer eine eindeutige Lösung $X = A^{-1}B$.

2. Erinnern wir uns daran, dass die Menge aller Lösungen eines unhomogenen linearen Systems $AX = B$ entweder leer ist, oder die Form $X_0 + \text{Ker } A$ hat, wobei X_0 eine bestimmte Lösung ist und $\text{Ker } A$ die Menge aller Lösungen des homogenen linearen Systems $AX = 0$ ist.

Es ist jedoch klar, dass $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ als Abbildung $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ einen nicht-trivialen Kern hat. In der Tat

$$\dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A = 4,$$

aber es ist $\dim \text{Im } A \leq 3$ und deshalb gilt $\dim \text{Ker } A > 0$. Mit anderen Worten: das Gleichungssystem 2. kann nie eine eindeutige Lösung haben.

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Lösung.

Erinnern wir uns daran, dass der Rang einer Matrix der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen gleicht. Da linear unabhängige Zeilen nach elementaren Transformationen linear unabhängig bleiben, ändert sich auch der Rang nicht. Deshalb können wir das gaußsche Eliminationsverfahren anwenden, um den Rang zu bestimmen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 \mapsto r_2 - 2r_1 \\ r_3 \mapsto r_3 - 11r_1 \\ r_4 \mapsto r_4 - 2r_1 \end{matrix}}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} r_3 \mapsto r_3 - 4r_2 \\ r_4 \mapsto r_4 + r_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_3 \mapsto r_3 - 4r_2 \\ r_4 \mapsto r_4 + r_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist der Rang von $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gleich 2. Deshalb ist der Rang von $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

auch gleich 2.

Aufgabe 3.

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass $\det A = 1$, und finden Sie die Inverse A^{-1}

zu A .

Hinweis: Lösen Sie die Gleichungssysteme $AX = e_i$ für Standardbasisvektoren e_i .

Lösung.

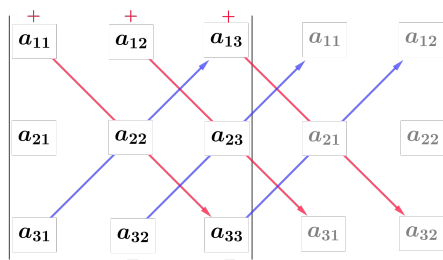
Wir können die sarrussche Regel nutzen, um die Determinante zu berechnen. Für die 3×3 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

besteht die Determinante aus 6 Summanden von je 3 Faktoren:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Die Vorzeichen Plus und Minus kann man sich nach folgendem Schema merken:



Vorsicht: die Regel von Sarrus gilt nur für Determinanten dritter Ordnung.

In unserem Fall, haben wir

$$\det A = 0 + 4 + 1 - 4 - 0 - 0 = 1.$$

Lösen wir jetzt die Gleichungssysteme $AX = e_i$ für Standardbasisvektoren e_i . Zuerst müssen wir die Matrix A in eine Zeilenstufenform bringen. Dafür wenden wir das gaußsche Eliminationsverfahren auf $A|e_1|e_2|e_3$ an:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 1 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir jetzt mit $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Das System $AX = e_i$ ist äquivalent zum System $\tilde{A}X = B_i$. Diese Systeme haben eindeutige Lösungen:

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1, \quad \tilde{A} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = B_2, \quad \tilde{A} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = B_3.$$

Deshalb haben wir auch:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 4.

Für ein n -Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ aus Elementen x_i in einem Körper K ist die Vandermonde-Matrix definiert durch:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\det V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Lösung.

Wir beweisen die Annahme durch Induktion. Induktionsanfang $n = 1$ ist klar.

Jetzt führen wir elementare Transformationen von Zeilen durch. Wenn wir x_1 mal die i -te Zeile von der $(i + 1)$ -ten Zeile subtrahieren, erhalten wir Folgendes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_n \mapsto r_n - x_1 \cdot r_{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

Durch Erweiterung der Determinante um die erste Spalte erhalten wir, dass die Determinante von $V(x_1, \dots, x_n)$ gleich der Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} \\ (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

ist. Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_3 - x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_n - x_1)x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_2 - x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{pmatrix},$$

deshalb auch gilt

$$\det V(x_1, \dots, x_n) = \det V(x_2, \dots, x_n) \cdot \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_3 - x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - x_1 \end{pmatrix}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass

$$\det V(x_2, \dots, x_n) = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

gilt, und offensichtlich haben wir auch

$$\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_3 - x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n - x_1 \end{pmatrix} = \prod_{1 < i \leq n} (x_i - x_1).$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.