Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
9. Januar 2025

# Lineare Algebra I – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 09

**Aufgabe 1.**
Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Geben Sie die Koordinaten $x_i^{\mathcal{B}}(e_j)$ der Standardbasisvektoren $e_1$, $e_2$ an.
*Hinweis:* Sie dürfen Aufgabe 2 aus Übungsblatt 6 benutzen.

**Lösung.**
Erinnern wir uns daran, dass wir für jede $\mathbb{R}$-Basis $\mathcal{B} = \{u, v\}$ von $\mathbb{R}^2$ eine Bijektion $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ haben, die $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf $u \cdot a + v \cdot b$ schickt. Dann setzen wir für $w \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1^{\mathcal{B}}(w) \\ x_2^{\mathcal{B}}(w) \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(w) \in \mathbb{R}^2$$

und $x_i^{\mathcal{B}}(w)$ werden die Koordinaten von $w$ relativ zur Basis $\mathcal{B}$ genannt. Mit anderen Worten: um $x_i^{\mathcal{B}}(w)$ zu bestimmen, müssen wir ein Element $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ finden, so dass

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = ua + vb = w.$$

In unserem Fall müssen wir $a$, $b \in \mathbb{R}^2$ finden, so dass

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist. Das ist nur möglich, wenn

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb müssen wir dieses lineare Gleichungssystem lösen. Wir können beide Seiten dieser Gleichung mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ multiplizieren

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder äquivalent dazu die elementare Zeilentransformation durchführen

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{array} \right)_{r_2 \mapsto r_2 - 3r_1} \mapsto \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Aus dem Gleichungssytem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

schließen wir, dass $b=-3$ ist und $2a+b=2a-3=1$. Deshalb ist $a=2$. Mit anderen Worten ist $x_1^{\mathcal{B}}(e_1)=2$ und $x_1^{\mathcal{B}}(e_1)=-3$.

Ähnlich müssen wir $a,\, b \in \mathbb{R}^2$ finden, so dass

$$\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} a + \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} b = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

ist. Das ist nur möglich, wenn

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Wir können wieder beide Seiten dieser Gleichung mit der Matrix $\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}$ multiplizieren

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

oder äquivalent dazu die elementare Zeilentransformation durchführen

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 0\\6 & 4 & 1\end{array}\right)_{r_2\mapsto r_2-3r_1} \mapsto \left(\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Aus dem Gleichungssytem

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

schließen wir, dass $b=1$ ist und $2a+1=0$. Deshalb ist $a=-1/2$. Mit anderen Worten $x_1^{\mathcal{B}}(e_2)=-1/2$ und $x_2^{\mathcal{B}}(e_2)=1$.

**Aufgabe 2.**
Für eine Matrix und Vektoren

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 0 & 1\\2 & 3 & 4 & 5 & 6\\0 & 2 & 2 & 4 & 4\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad B' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

bestimmen Sie alle Lösungen

1. des homogenen linearen Gleichungssystems $A\cdot X = 0$;
2. des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\cdot X = B$;
3. des inhomogenen linearen Gleichunsgsystems $A\cdot X = B'$.

**Lösung.**
Um alle linearen Gleichungssystemen 1., 2., 3. zu lösen, müssen wir die Matrix $A$ in eine Zeilenstufenform bringen. Dafür wenden wir das gaußsche Eliminationsverfahren auf $A|B|B'$ an:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 1\\0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & -1\end{array}\right)_{\substack{r_2\mapsto r_2-r_1\\ r_3\mapsto r_3-2r_1}} \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & -1\\0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & -1\end{array}\right)_{\substack{r_3\mapsto r_3+r_2\\ r_4\mapsto r_4+2r_2}} \mapsto$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 2 & 4 & -1 & -1\\0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 & -1\end{array}\right)_{r_4\mapsto r_4-r_3} \mapsto \left(\begin{array}{ccccc|c|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 2 & 4 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right).$$

1. Sei $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist das Gleichungssystem $AX = 0$ äquivalent zum System $\widetilde{A}X = 0$. Für $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ haben wir $x_3 = -x_4 - 2x_5$, $x_2 = -x_4$, und $x_1 + (-x_4) + (-x_4 - 2x_5) + x_4 + x_5 = 0$, d.h. $x_1 = x_4 + x_5$. Mit anderen Worten ist die Menge der Lösungen gleich

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \widetilde{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x_4 + x_5 \\ -x_4 \\ -x_4 - 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \middle| \; x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Sei $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann ist das Gleichungssystem $AX = B$ äquivalent zum System

$$\widetilde{A}X = \widetilde{B},$$

aber das letzte System hat keine Lösungen, da

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \neq 2.$$

3. Sei $\widetilde{B}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist das Gleichungssystem $AX = B'$ äquivalent zum System

$$\widetilde{A}X = \widetilde{B}'.$$

Bemerken wir zuerst, dass dieses System eine Lösung hat, z.B. $x_4 = 0 = x_5$, $x_3 = -1/2$, $x_2 = 0$, $x_1 = 3/2$. Mit andren Worten: für $X_0 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $AX_0 = B'$. Dann ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems $AX = B'$ gleich

$$X_0 + \operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 + x_4 + x_5 \\ -x_4 \\ -1/2 - x_4 - 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \middle| \; x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Aufgabe 3.**
Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x + ty + z = 0 \\ tx + y + z = 0 \end{cases}$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

**Lösung.**

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Dann ist unser Gleichungssystem äquivalent zum System $AX = 0$. Wir wenden das gaußsche Eliminationsverfahren auf dieses System an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}_{r_2 \mapsto r_2 - tr_1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1-t^2 & 1-t \end{pmatrix} =: \widetilde{A}.$$

Dann ist das Gleichungssystem $AX = 0$ äquivalent zum System $\widetilde{A}X = 0$.

Nehmen wir zuerst an, dass $t \neq 1$. Dann $z = -\dfrac{1-t^2}{1-t} y = -(1+t)y$ und $x = -ty - z = -ty + (1+t)y = y$. Deshalb ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystem gleich

$$\left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ -(1+t)y \end{pmatrix} \middle| \; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nehmen wir nun an, dass $t = 1$. Dann $x = -y - z$ und die Menge aller Lösungen des Gleichungssystem ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Aufgabe 4.**
Sei $f\colon U \to V$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass

$$\dim V - \dim U = \dim \operatorname{Coker}(f) - \dim \operatorname{Ker}(f)$$

ist.

**Lösung.**
Erinnern wir uns daran, dass $\operatorname{Coker}(f) = V/\operatorname{Im}(f)$. Erinnern wir uns auch daran, dass für jeden Unterraum $W \leq V$ der Kern $\operatorname{Ker}(g)$ der kanonischen Projektion $g\colon V \to V/W$ gleich $W$ und das Bild $\operatorname{Im}(g)$ gleich $V/W$ ist (vgl. Lösung der Aufgabe 3 aus Übungsblatt 8).

Insbesondere für $W = \operatorname{Im}(f)$ schließen wir, dass $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$ und $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Coker}(f)$ ist. Aber da

$$\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim U$$

und

$$\dim \operatorname{Ker}(g) + \dim \operatorname{Im}(g) = \dim V$$

gilt, schließen wir, dass

$$\dim \operatorname{Im}(f) + \dim \operatorname{Coker}(f) = \dim V$$

gilt, und deshalb gilt auch

$$\dim V - \dim U = \dim \operatorname{Coker}(f) - \dim \operatorname{Ker}(f).$$