Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
19. Dezember 2024

Lineare Algebra I – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 08

Aufgabe 1.
Sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass die Multiplikation im Matrizenring $\mathrm{M}_2(K)$ nicht kommutativ ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(K)$.

Lösung.
Wir werden für $ab \neq 0$ beweisen, dass $AB \neq BA$ gilt. Wir multiplizieren

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1+ab \end{pmatrix}.$$

Es folgt $AB = BA$, wenn und nur wenn $1 = 1 + ab$, d.h., wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist.

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper, $a \in K$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie den Kern $\mathrm{Ker}(A)$ und das Bild $\mathrm{Im}(A)$ der Matrix A, die als Endomorphismus von K^2 betrachtet wird. Bestimmen Sie insbesondere die Dimensionen dieser Vektorräume in Abhängigkeit von a.

Lösung.
Sei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+av \\ au+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten gilt $u + av = 0$ und $au + v = 0$ gilt. Insbesondere

$$u = -av = -a(-au) = a^2 u,$$

d.h., es gilt $(1 - a^2)u = 0$ und analog $(1 - a^2)v = 0$.

Nehmen wir zuerst an, dass $1 - a^2 \neq 0$. In diesem Fall schließen wir $u = 0 = v$. Deshalb ist $\mathrm{Ker}(A)$ trivial und somit $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$. Aber da

$$\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathrm{Im}(A) = \dim K^2$$

gilt, folgt daraus, dass $\dim \mathrm{Im}(A) = 2$ ist, d.h. $\mathrm{Im}(A) = K^2$.

Nehmen wir nun an, dass $1 - a^2 = (1 - a)(1 + a) = 0$ gilt. Das ist nur möglich, wenn $1 - a = 0$ oder $1 + a = 0$ ist, mit anderen Worten für $a = 1$ oder $a = -1$.

Falls $a = 1$, schließen wir, dass $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A)$ gilt, wenn und nur wenn $v = -u$, d.h.,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot u.$$

Es folgt, $\operatorname{Ker}(A)$ wird von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ erzeugt und $\dim \operatorname{Ker}(A) = 1$.

Andererseits für $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in K^2$ haben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ u+v \end{pmatrix}.$$

Daraus schließen wir, dass jedes Element in $\operatorname{Im}(A)$ die Form $\begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}$ hat, d.h., $\operatorname{Im}(A)$ wird von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt und $\dim \operatorname{Im}(A) = 1$.

Falls $a = -1$, schließen wir, dass $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A)$ gilt, wenn und nur wenn $v = u$, d.h.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u.$$

Mit anderen Worten $\operatorname{Ker}(A)$ wird von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt und es gilt $\dim \operatorname{Ker}(A) = 1$.

Auf der anderen Seite für $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in K^2$ haben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-v \\ v-u \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass jedes Element in $\operatorname{Im}(A)$ die Form $\begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix}$ hat, d.h., $\operatorname{Im}(A)$ wird von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ erzeugt und $\dim \operatorname{Im}(A) = 1$.

Aufgabe 3.
Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $W \leq V$ ein Unterraum. Bezeichnen Sie mit $r = \dim V - \dim W$.

1. Beweisen Sie, dass es lineare Formen $f_i \colon V \to K$, $1 \leq i \leq r$, gibt, so dass $W = \{v \in V \mid f_i(v) = 0,\ 1 \leq i \leq r\}$ gilt.
2. Ist es möglich lineare Formen $g_i \colon V \to K$, $1 \leq i \leq k$ für $k < r$ zu finden, so dass $W = \{v \in V \mid g_i(v) = 0,\ 1 \leq i \leq k\}$ gilt?

Lösung.

1. Sei V/W der Quotientenraum und $F \colon V \to V/W$ die kanonische Projektion. Erinnern wir uns daran, dass der Quotientenraum V/W die Menge aller Äquivalenzklassen

$$V/W = \{\overline{v} \mid v \in V\}$$

ist, wobei $\overline{v} = v + W = \{v' \in V \mid v' - v \in W\}$. Die kanonische Projektion F bildet v auf $\overline{v}$ ab.

Der Quotientenraum hat die natürliche Struktur eines Vektorraums, so dass

$$\overline{u} + \overline{v} = \overline{u+v} \quad \text{und} \quad \alpha \cdot \overline{u} = \overline{\alpha u}$$

für alle $u,\ v \in V,\ \alpha \in K$ gilt. Insbesondere ist F linear.

Da $\overline{0} = 0 + W = W$ das Nullelement von V/W ist, gilt

$$\mathrm{Ker}(F) = \{v \in V \mid \overline{v} = \overline{0}\} = \{v \in V \mid v - 0 \in W\} = W.$$

Außerdem ist F nach Definition surjektiv, d.h. $\mathrm{Im}(F) = V/W$. Da

$$\dim \mathrm{Ker}(F) + \dim \mathrm{Im}(F) = \dim V,$$

schließen wir, dass $\dim V/W = \dim V - \dim W = r$ ist. Dann gibt es einen linearen Isomorphismus $G\colon V/W \xrightarrow{\cong} K^r$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{pr}_i\colon K^r \to K$ die Koordinatenfunktionen, die $(u_1, \ldots, u_r) \in K^r$ auf u_i abbilden. Betrachten wir jetzt die linearen Formen

$$f_i := \mathrm{pr}_i \circ G \circ F\colon V \to V/W \xrightarrow{\cong} K^r \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} K.$$

Da G ein Isomorphismus ist, gilt $F(v) = 0$, wenn und nur wenn $(G \circ F)(v) = 0$ für $v \in V$, und offensichtlich gilt $(G \circ F)(v) = 0$, wenn und nur wenn $\mathrm{pr}_i\big((G \circ F)(v)\big) = 0$ gilt für $1 \leq i \leq r$. Nach Konstruktion ist

$$\mathrm{Ker}(F) = \{v \in V \mid f_i(v) = 0,\ 1 \leq i \leq r\},$$

aber $\mathrm{Ker}(F) = W$.

2. Nehmen wir an, dass $W = \{v \in V \mid g_i(v) = 0,\ 1 \leq i \leq k\}$ für $k < r$ und betrachten wir die lineare Abbildung $G\colon V \to K^k$, die v nach $\begin{pmatrix} g_1(v) \\ g_2(v) \\ \vdots \\ g_k(v) \end{pmatrix}$ schickt. Offensichtlich ist $W = \mathrm{Ker}(G)$. Andererseits

$$\dim \mathrm{Ker}(G) + \dim \mathrm{Im}(G) = \dim V$$

und $\dim \mathrm{Im}(G) \leq k < r$. Deshalb haben wir

$$r = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(G) = \dim \mathrm{Im}(G) < r.$$

Der Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war.

Aufgabe 4.

Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein linearer Endomorphismus, so dass $f \circ f = f$.

1. Zeigen Sie, dass $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Für $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ beschreibe man alle möglichen Matrizen einer solchen linearen Abbildung f (z.B. in einer Standardbasis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ von V).
3. Beweisen Sie, dass V eine Basis $\mathcal{B}$ zulässt, so dass die Matrix von f in dieser Basis die Form $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ hat.

Lösung.

1. Wir müssen beweisen, dass $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = V$ und $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = 0$ gelten.

   Zeigen wir zuerst, dass $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = V$. Sei $v \in V$. Dann

   $$f(v - f(v)) = f(v) - (f \circ f)(v) = f(v) - f(v) = 0,$$

   d.h., es gilt $v - f(v) \in \mathrm{Ker}(f)$, aber dann $v = (v - f(v)) + f(v) \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.

   Jetzt beweisen wir, dass $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = 0$. Sei $v \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Dann $f(v) = 0$ und es gibt $u \in V$, so dass $v = f(u)$. Aber dann

   $$v = f(u) = f(f(u)) = f(v) = 0.$$

2. Sei A eine Matrix der Abbildung f. Offensichtlich $f \circ f = f$, wenn und nur wenn $A^2 = A$. Mit anderen Worten müssen wir alle Matrizen $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ bestimmen, so dass $A^2 = A$ gilt. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Für das Produkt mit sich selbst muss gelten

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

   Beachten Sie, dass $x^2 = x$ für jedes $x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, insbesondere ist $A^2 = A$ nur möglich, wenn $bc = 0$, d.h. $b = 0$ oder $c = 0$.

   Nehmen wir zuerst an, dass $c = 1$ ist. Dann haben wir $b = 0$ und $a + d = 1$, d.h.

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Nehmen wir als nächstes an, dass $b = 1$ ist. Dann haben wir $c = 0$ und $a + d = 1$, d.h.

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Zum Schluss nehmen wir an, dass $b = 0 = c$. Dann sind a und d beliebig, d.h.

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Diese acht Matrizen sind die Matrizen, die f annehmen kann.

3. Betrachten wir eine Basis $\mathcal{B}_1 = \{b_1, \ldots, b_k\}$ von $\mathrm{Im}(f)$, und eine Basis $\mathcal{B}_2 = \{b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ von $\mathrm{Ker}(f)$. Da $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, schließen wir, dass $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ eine Basis von V ist.

   Erinnern wir uns daran, dass, um die Matrix der lineare Abbildung in der Basis $\mathcal{B}$ zu finden, müssen wir $f(b_k)$ bestimmen und als eine lineare Kombination

   $$f(b_k) = a_{1k} b_1 + a_{2k} b_2 + \ldots + a_{nk} b_n$$

   der Basisvektoren b_i zerlegen. Nach der Definition, ist dann $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ die k-te Spalte der Matrix von f in der Basis $\mathcal{B}$.

   Da $b_i \in \mathrm{Im}(f)$ für $i \leq k$ gilt, gibt es $u \in V$ so dass $b_i = f(u)$ und deshalb gilt $f(b_i) = f(f(u)) = f(u) = b_i$. Da $b_i \in \mathrm{Ker}(f)$ für $i > k$ gilt, haben wir $f(b_i) = 0$ in diesem Fall.

   Deshalb schließen wir, dass die Matrix von f in der Basis $\mathcal{B}$ gleich

   $$\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$$

   ist.