



Prof. Dr. Fabien Morel

Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25

5. Dezember 2024

Lineare Algebra I – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 06

Aufgabe 1.

Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\mathcal{B} := \{1, z\}$.

1. Für welche z ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorraum?
2. Falls $\mathcal{B}$ eine Basis ist, geben Sie eine explizite Formel für die Koordinaten $x_i^{\mathcal{B}}(v)$ von $v \in \mathbb{C}$ an.

Lösung.

1. Erinnern wir uns daran, dass $\{1, i\}$ eine $\mathbb{R}$ -Basis von $\mathbb{C}$ ist, insbesondere ist $\mathbb{C}$ ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und jede $\mathbb{R}$ -Basis von $\mathbb{C}$ hat genau zwei Elemente. Erinnern wir uns auch daran, dass man jede Menge linear unabhängiger Vektoren zu einer Basis ergänzen kann. Insbesondere ist $\{1, z\}$ linear unabhängig, wenn und nur wenn $\{1, z\}$ eine Basis ist. In der Tat, falls $\{1, z\}$ linear unabhängig ist, gibt es eine Basis $\mathcal{B} \supset \{1, z\}$, aber jede Basis hat zwei Elemente, deshalb gilt $\mathcal{B} = \{1, z\}$.

Deshalb müssen wir bestimmen, welche komplexen Zahlen z linear unabhängig von 1 sind. Nehmen wir an, dass 1 und z linear abhängig sind, d.h., $\exists a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$a \cdot 1 + b \cdot z = 0 \tag{1}$$

mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Offensichtlich, falls $b = 0$ haben wir auch $a = 0$ aus (1), aber das ist unmöglich. Deshalb gilt $b \neq 0$, und haben wir $z = a/b$ aus (1), insbesondere ist z reell. Mit anderen Worten: alle komplexen Zahlen, die von 1 linear abhängig sind, sind reell. Umgekehrt, für jede reelle Zahl z gibt es die nicht triviale lineare Kombination (1) für $a = z$ und $b = -1$.

Mit anderen Worten: $\{1, z\}$ ist eine $\mathbb{R}$ -Basis von $\mathbb{C}$, wenn und nur wenn $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

2. Erinnern wir uns daran, dass für jede $\mathbb{R}$ -Basis $\mathcal{B} = \{1, z\}$ von $\mathbb{C}$ haben wir eine Bijektion $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, die $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ auf $a \cdot 1 + b \cdot z$ schickt. Dann bezeichnen wir für $v \in \mathbb{C}$

$$(x_1^{\mathcal{B}}(v), x_2^{\mathcal{B}}(v)) = \Phi^{-1}(v) \in \mathbb{R}^2,$$

und $x_i^{\mathcal{B}}(v)$ werden die Koordinaten von v relativ zur Basis $\mathcal{B}$ genannt.

Mit anderen Worten: um $x_i^{\mathcal{B}}(v)$ zu bestimmen, müssen wir ein Element $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ finden, so dass $\Phi(u) = a + bz = v$. Dann gilt $(x_1^{\mathcal{B}}(v), x_2^{\mathcal{B}}(v)) = \Phi^{-1}(v) = (a, b)$.

Falls $a + bz = v$, schließen wir, dass $v - bz = a$ real ist, d.h.

$$\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Im}(bz) = b \cdot \operatorname{Im}(z).$$

Aber, da $\{1, z\}$ eine Basis ist, wissen wir aus "1.", dass $\operatorname{Im}(z) \neq 0$. Deshalb gilt

$$b = \operatorname{Im}(v)/\operatorname{Im}(z).$$

Dann haben wir $x_2^{\mathcal{B}}(v) = \operatorname{Im}(v)/\operatorname{Im}(z)$ und $x_1^{\mathcal{B}}(v) = v - (\operatorname{Im}(v)/\operatorname{Im}(z))z$.

Aufgabe 2.

Sei $u = (a, b)$, $v = (c, d) \in K^2$ für einen Körper K und $\mathcal{B} = \{u, v\}$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von K^2 ist, wenn und nur wenn $ad - bc \neq 0$.

Lösung.

Wie wir schon in Aufgabe 1 bemerkt haben, sind zwei Vektoren $u, v \in K^2$ linear unabhängig, wenn und nur wenn $\{u, v\}$ eine Basis ist. Deshalb ist es genug zu zeigen, dass $ad - bc \neq 0$, wenn und nur wenn u und v linear unabhängig sind.

Nehmen wir zuerst an, dass $ad - bc = 0$ gilt. Dann gilt:

$$d(a, b) - b(c, d) = (ad - bc, bd - bd) = (0, 0)$$

und

$$c(a, b) - a(c, d) = (ac - ac, bc - ad) = (0, 0).$$

Falls eines der Elemente a, b, c, d nicht gleich Null ist, erhalten wir eine nicht triviale lineare Kombination von u und v . Falls alle a, b, c, d gleich Null sind, d.h. $u = 0 = v$, haben wir zum Beispiel die nicht triviale lineare Kombination $1 \cdot u + 1 \cdot v = 0$.

Mit anderen Worten: falls $ad - bc = 0$ gilt, sind u und v linear abhängig.

Nehmen wir zunächst an, dass u und v linear abhängig sind, d.h., es gibt $x, y \in K$, so dass

$$x(a, b) + y(c, d) = 0$$

mit $x \neq 0$ oder $y \neq 0$. Falls $v = (0, 0)$, haben wir in der Tat

$$ad - bc = a \cdot 0 - b \cdot 0 = 0.$$

Falls $v \neq (0, 0)$, gilt auch $x \neq 0$, und deshalb

$$(a, b) = -\frac{y}{x}(c, d),$$

mit anderen Worten: $a = -yc/x$ und $b = -yd/x$. Aber dann gilt auch

$$ad - bc = \frac{-yc}{x} \cdot d - \frac{-yd}{x} \cdot c = \frac{-ycd + ycd}{x} = 0.$$

Deshalb haben wir bewiesen, dass u und v linear abhängig sind, wenn und nur wenn $ad - bc = 0$.

Aufgabe 3.

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $v_1, \dots, v_n \in V$. Beweisen Sie, dass $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, wenn und nur wenn für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ der Vektor v_k nicht zu dem Vektorraum $\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$ gehört.

Lösung.

Nehmen wir zuerst an, dass $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$ für einige k , d.h.,

$$v_k = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{k-1} \cdot v_{k-1}$$

für $a_1, \dots, a_{k-1} \in K$. Dann erhalten wir eine nicht triviale lineare Kombination von v_k :

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{k-1} \cdot v_{k-1} + (-1) \cdot v_k + 0 \cdot v_{k+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0.$$

Mit anderen Worten $v_1, \dots, v_n$ sind linear abhängig.

Umgekehrt nehmen wir an, dass $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind, d.h., es gibt eine nicht triviale lineare Kombination

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_n \cdot v_n = 0.$$

Sei k die größte Zahl, so dass $a_k \neq 0$. Dann gilt:

$$v_k = -\frac{1}{a_k}(a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{k-1} \cdot v_{k-1}),$$

mit anderen Worten, v_k gehört zu $\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$.

Aufgabe 4.

1. Sei K ein unendlicher Körper und $n \geq 2$. Beweisen Sie, dass K^n nicht als endliche Vereinigung echter Untervektorräume geschrieben werden kann.
2. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ für eine Primzahl p als endliche Vereinigung echter Untervektorräume geschrieben werden kann.

Lösung.

1. Wir werden per Induktion über m zeigen, dass K^n keine Vereinigung m echter Untervektorräume ist. Der Induktionsanfang $m = 1$ ist klar: in der Tat, ist $K^n = U$ unmöglich für echtes U .

Jetzt nehmen wir an, dass $K^n = U_1 \cup \dots \cup U_m$ für echte U_i . Aus der Induktionsannahme können wir schließen, dass $U_m \not\subset \bigcup_{j < m} U_j$. In der Tat, falls $U_m \subset \bigcup_{j < m} U_j$, haben wir $K^n = \bigcup_j U_j = \bigcup_{j < m} U_j$, was unmöglich ist wegen der Induktionsannahme.

Da $U_m \not\subset \bigcup_{j < m} U_j$, gibt es $u \in U_m$, so dass $u \notin U_j$ für $j < m$. Da U_m echt ist, gibt es $v \in V \setminus U_m$. Sei $L := \{v + au \mid a \in K\}$.

Offensichtlich gilt $U_m \cap L = \emptyset$. In der Tat, falls $v + au \in U_m$, gilt auch $v = (v + au) - a \cdot u \in U_m$, aber das widerspricht unserer Annahme $v \notin U_m$.

Jetzt beweisen wir, dass $U_j \cap L$ nicht mehr als ein Element enthalten kann für $j < m$. In der Tat, falls $v + au, v + bu \in U_j$ für $a \neq b$, haben wir auch $(a - b)u = (v + au) - (v + bu) \in U_j$, aber da $a - b \neq 0$, schließen wir, dass $u = (a - b)^{-1} \cdot (a - b)u$ auch zu U_j gehört, aber das widerspricht unserer Annahme $u \notin U_j$.

Da

$$L = L \cap K^n = L \cap \left(\bigcup_{j=1}^m U_j \right) = \bigcup_{j=1}^m (L \cap U_j),$$

kann L nicht mehr als $m - 1$ Elemente enthalten. Insbesondere ist L endlich.

Aber die Abbildung $K \rightarrow L$, die a auf $v + au$ schickt, ist injektiv. In der Tat, falls $v + au = v + bu$ für $a \neq b \in K$ gilt, haben wir auch $(a - b)u = 0$ und, da $a - b \neq 0$, schließen wir $u = (a - b)^{-1}(a - b)u = 0$. Aber das ist unmöglich, da $u \notin U_j$ für $j < m$.

Da K unendlich und L endlich ist, erhalten wir einen Widerspruch.

2. Wir können schreiben

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 = \bigcup_{v \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2} \langle v \rangle.$$

Da $\mathbb{Z}/p$ eine endliche Menge ist, ist auch $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ eine endliche Menge. Folglich haben wir $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ als endliche Vereinigung von Untervektorräumen geschrieben. Da $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ zweidimensional, aber für alle $v \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ der Unterraum $\langle v \rangle$ höchstens eindimensional ist, ist $\langle v \rangle$ für jedes $v \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ ein echter Unterraum. Dies zeigt die Behauptung.