Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
28. November 2024

Lineare Algebra I – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 05

Aufgabe 1.
Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$, die $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ auf $f(x, y) := 2x + 3y$ schickt.

1. Beweisen Sie, dass f eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.
2. Zeigen Sie, dass der "Unterraum der Lösungen" $U := \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid 2x + 3y = 0\} \leq \mathbb{Q}^2$ eine Erzeugungsmenge $\{b\} \subset U$ zulässt, die aus einem Element $b \in U$ besteht.

Lösung.

1. Die Abbildung $f\colon U \to V$ zwischen zwei Vektorräumen über einem Körper K heißt nach Definition linear, wenn für alle $a, b \in K$ und alle $u, v \in U$ gilt: $f(au+bv) = af(u)+bf(v)$. In unserem Fall $K = \mathbb{Q}$, $U = \mathbb{Q}^2$ und $V = \mathbb{Q}$. Seien $u = (x, y)$ und $v = (z, w) \in \mathbb{Q}^2$ und $a, b \in \mathbb{Q}$. Dann

   $$f(au + bv) = f\big(a(x, y) + b(z, w)\big) = f\big((ax + bz, ay + bw)\big) = 2(ax + bz) + 3(ay + bw).$$

   Auf der anderen Seite

   $$af(u) + bf(v) = a(2x + 3y) + b(2z + 3w) = f(au + bv).$$

2. Wir werden zeigen, dass U von $b = (1, -\frac{2}{3})$ erzeugt wird. Zuerst sei $v \in {}_{\mathbb{Q}}\langle b\rangle$, d.h. $v = a \cdot b$ für ein $a \in \mathbb{Q}$ und daher $v = (a, -\frac{2}{3}a)$. Dann ist $f(v) = 2 \cdot a + 3(-\frac{2}{3}a) = 0$, also $v \in U$. Mit anderen Worten: ${}_{\mathbb{Q}}\langle b\rangle \subset U$.

   Umgekehrt sei $v = (x, y) \in U$, d.h. $2x + 3y = 0$. Dann gilt $y = -\frac{2x}{3}$, d.h. $v = (x, -\frac{2}{3}x) = x \cdot (1, -\frac{2}{3}) \in {}_{\mathbb{Q}}\langle b\rangle$. Mit anderen Worten: $U \subset {}_{\mathbb{Q}}\langle b\rangle$.

Aufgabe 2.
Betrachten Sie einen Gruppenhomomorphismus $g\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, der $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ auf $g(x, y) := 2x + 3y$ schickt. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{Ker}(g)$ zyklisch ist, d.h. von einem Element $b \in \mathrm{Ker}(g)$ erzeugt wird.

Lösung.
Wir werden zeigen, dass $H = \mathrm{Ker}(g)$ durch $b = (3, -2)$ erzeugt wird. Offensichtlich $b \in H$. Laut Definition müssen wir zeigen, dass jedes $h \in H$ gleich $m \cdot b$ oder $m \cdot (-b)$ für irgendein $m \in \mathbb{N}$ ist.

Tatsächlich sei $(x, y) \in H$, d.h. $g(x, y) = 2x + 3y = 0$. Wenn wir diese Gleichheit als $3y = -2x$ schreiben, sehen wir, dass y gerade sein muss, d.h. $y = 2z$ für ein $z \in \mathbb{Z}$. Jetzt können wir die Gleichung als $2(x + 3z) = 0$ umschreiben, also $x + 3z = 0$, d.h. $x = -3z$. Mit anderen Worten: $(x, y) = -z \cdot (3, -2)$.

Aufgabe 3.

Sei K ein Körper und betrachte den Vektorraum $V = K^n$ über K für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Erinnern wir uns daran, dass als $e_i \in V$ das Element $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in K^n$ mit 1 an der i-ten Position und Nullen sonst bezeichnet wird (für $1 \leq i \leq n$). Es sei $f_i := e_i + e_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$. Bezeichnen Sie mit U den Unterraum $U := \langle f_1, \ldots, f_{n-1} \rangle \leq V$, der von den f_i erzeugt wird.

1. Beweisen Sie, dass $e_1 + (-1)^n e_n = (1, 0, \ldots, 0, (-1)^n) \in U$.
2. Beweisen Sie, dass $e_1 \notin U$.
3. Finde Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$, so dass für $v = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ gilt: $v \in U$, wenn und nur wenn $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$ (mit anderen Worten, finde eine Gleichung, die U bestimmt).

Lösung.

1. Benutzen Sie, dass $U \ni \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} f_i = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} (e_i + e_{i+1}) = e_1 + (-1)^n e_n$.
2. Um zu beweisen, dass $e_1 \notin U$ gilt, werden wir eine bestimmte Eigenschaft von Vektoren in U finden, die für e_1 nicht gilt. Genauer gesagt werden wir zeigen, dass für alle Vektoren $u = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ gilt
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i = 0. \tag{1}$$
Tatsächlich betrachten wir den Unterraum der Lösungen von (1):
$$W = \left\{ v = (x_1, \ldots, x_n) \in V \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i = 0 \right\} \leq V.$$
Es ist klar, dass man für $v = f_i$ $\sum (-1)^i x_i = (-1)^i + (-1)^{i+1} = 0$ für alle i hat, d.h. $f_i \in W$. Da W ein Unterraum ist, folgt daraus, dass jede Linearkombination von f_i auch zu W gehört, also $U \subset W$. Allerdings hat man für $v = e_1$ $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i = -1$, d.h. $e_1 \notin W$. Insbesondere kann e_1 nicht zu U gehören.
3. Wir haben bereits in "2." für $a_i = (-1)^i \in K$ bewiesen, dass für alle $u = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ die Gleichung $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ erfüllt ist, d.h. $U \subset W$. Beweisen wir nun, dass $W \subset U$.

   Nehmen wir $v = (x_1, \ldots, x_n) \in W$, d.h. $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i = 0$. Nehmen wir weiter an, dass $x_1 = \ldots = x_m = 0$ für einige $m \geq 0$. Wir werden durch Induktion auf m zeigen, dass $v \in U$ ist. Beachten Sie, dass wir $m = n-1$ als Induktionsanfang und $m = 0$ als letzten Schritt des induktiven Arguments verwenden.

   Tatsächlich, wenn $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$, dann impliziert die Gleichung (1), dass auch $x_n = 0$, also $v = 0 \in U$.

   Nehmen wir nun an, dass $x_1 = \ldots = x_{m-1} = 0$ und setze $w = v - x_m \cdot f_m$. Da v und $f_m \in W$ sind, haben wir $w \in W$, aber, wenn $w = (y_1, \ldots, y_n)$, haben wir $y_1 = \ldots = y_m = 0$. Aus der Induktionsannahme können wir nun schließen, dass $w \in U$ ist. Allerdings gilt auch $f_m \in U$ und daher $v = w + x_m \cdot f_m \in U$.

   Durch Induktion schließen wir für jedes $v \in W$, dass $v \in U$. Mit anderen Worten, $U = W$, d. h. U ist die Menge der Lösungen der Gleichung (1).

Aufgabe 4.

1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, U_1, $U_2 \leq V$ Unterräume, und nehme an, dass $U_1 + U_2 = V$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$;

b) die Abbildung $U_1 \oplus U_2 \to V$, die (u_1, u_2) auf $u_1 + u_2$ schickt, ist eine lineare Bijektion.

2. Beweisen Sie, dass für $V = K^n$, $U_1 = U = \langle f_1, \ldots, f_{n-1} \rangle$ aus Aufgabe 3 und $U_2 = \langle e_1 \rangle$ eine lineare Bijektion zwischen $U_1 \oplus U_2$ und V existiert.

Lösung.

1. Erinnern wir uns daran, dass $U_1 \oplus U_2$ bezeichnet die Menge $U_1 \times U_2$ mit komponentenweisen Struktur eines Vektorraum. Zeigen wir zuerst, dass die Abbildung $f\colon U_1 \oplus U_2 \to V$ linear ist. Seien (u_1, u_2), $(v_1, v_2) \in U_1 \oplus U_2$ und a, $b \in K$. Dann

$$f(a(u_1, u_2) + b(v_1, v_2)) = (au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2)$$

und

$$af((u_1, u_2)) + bf((v_1, v_2)) = a(u_1 + u_2) + b(v_1 + v_2).$$

Mit anderen Worten: f ist linear.

Nehmen wir zuerst a) an. Da $U_1 + U_2 = V$, wissen wir, dass es für jedes $v \in V$ Elemente $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ gibt, so dass $u_1 + u_2 = v$. Deshalb ist die Abbildung $f\colon U_1 \oplus U_2 \to V$ surjektiv.

Weil f linear ist, ist f insbesondere auch ein Gruppenhomomorphismus additiver Gruppen $(U_1 \times U_2, +) = U_1 \oplus U_2$ nach $(V, +) = V$. Deshalb, um zu beweisen, dass f injektiv ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{Ker}(f)$ trivial ist.

Sei $(u_1, u_2) \in \mathrm{Ker}(f)$, d.h., $u_1 + u_2 = 0$. Dann $u_1 = -u_2 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Mit anderen Worten: $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ ist trivial.

Nehmen wir zunächst b) an. Da f injektiv ist, schließen wir insbesondere, dass $\mathrm{Ker}(f)$ trivial ist. Aber für jedes $u \in U_1 \cap U_2$ haben wir $f(u, -u) = u - u = 0$, d.h. $(u, -u) \in \mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$. Dann haben wir $u = 0$, und da $u \in U_1 \cap U_2$ beliebig war, haben wir $U_1 \cap U_2 \subset \{0\}$.

2. Beweisen wir zuerst, dass $U_1 + U_2 = V$. Es ist genug zu zeigen, dass $e_i \in U_1 + U_2$ für alle i. Wir werden es per Induktion über i zeigen. Für $i = 1$ haben wir $e_1 \in U_2 \subset U_1 + U_2$. Als nächstes, falls $e_i \in U_1 + U_2$, schließen wir, dass $e_{i+1} = f_i - e_i$ auch zu $U_1 + U_2$ gehört.

Abschließend müssen wir zeigen, dass $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Aber falls $v = x \cdot e_1 \in U_2$ zu U_1 gehört und $x \neq 0$, schließen wir, dass $x^{-1} \cdot v = e_1$ auch zu U_1 gehört, aber das ist unmöglich wegen Aufgabe 3.2. Es folgt $x = 0$ und deshalb $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.