



Prof. Dr. Fabien Morel

Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25

14. November 2024

Lineare Algebra I – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 03

Aufgabe 1.

Seien G, H Gruppen und $f: G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus.

1. Nehmen Sie an, f ist ein Monomorphismus und H abelsch. Beweisen Sie, dass G abelsch ist.
2. Nehmen Sie an, f ist ein Epimorphismus und G abelsch. Beweisen Sie, dass H abelsch ist.

Lösung.

1. Erinnern wir uns daran, dass G genau dann abelsch ist, wenn $\forall g, g' \in G, gg' = g'g$. Nehmen wir $g, g' \in G$; da f ein Gruppenhomomorphismus ist, haben wir $f(gg') = f(g)f(g')$ und $f(g'g) = f(g')f(g)$. Da H abelsch ist, haben wir $f(g)f(g') = f(g')f(g)$. Daraus schließen wir, dass

$$f(gg') = f(g)f(g') = f(g')f(g) = f(g'g).$$

2. Seien $h, h' \in H$. Da f surjektiv ist, gibt es $g, g' \in G$ mit $f(g) = h$ und $f(g') = h'$. Da f ein Gruppenhomomorphismus ist, haben wir $f(gg') = f(g)f(g') = hh'$ und $f(g'g) = f(g')f(g) = h'h$. Da G abelsch ist, haben wir auch $gg' = g'g$. Deshalb schließen wir, dass

$$hh' = f(gg') = f(g'g) = h'h.$$

Aufgabe 2.

Sei G eine Gruppe.

1. Erinnern wir uns daran, das Produkt $G \times G$ trägt eine induzierte Gruppenstruktur: $(g, h)(g', h') = (gg', hh')$. Beweisen Sie, dass $\cdot : G \times G \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus ist genau dann, wenn G abelsch ist.
2. Nehmen Sie an, dass für jedes $g \in G, g^2 = e$ gilt. Beweisen Sie, dass G abelsch ist.

Lösung.

1. Nehmen wir zuerst an, dass $\cdot : G \times G \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Mit anderen Worten, $\forall g, h, g', h' \in G$ haben wir

$$(gh)(g'h') = (gg')(hh').$$

Insbesondere, $\forall h, g' \in G$ haben wir

$$hg' = (e \cdot h)(g' \cdot e) = (e \cdot g')(h \cdot e) = g'h,$$

weshalb G abelsch ist.

Nehmen wir umgekehrt an, dass G abelsch ist. Seien $g, h, g', h' \in G$; dann

$$(gh)(g'h') = g(g'h)h' = g(hg')h' = (gg')(hh').$$

Mit anderen Worten ist $\cdot : G \times G \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus.

2. Da $\forall g \in G, g^2 = e$, schließen wir, dass $\forall g \in G, g^{-1} = g$. Nehmen wir $g, h \in G$ und erinnern uns daran, dass $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ (nach Aufgabe 2 von Übungsblatt 2). Deshalb haben wir:

$$gh = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = hg.$$

Aufgabe 3.

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n . Beweisen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ ist.

Lösung.

Da die Ordnung von G gleich n ist, haben wir $\mathfrak{S}_n \cong \mathfrak{S}_G$. Erinnern wir uns daran, dass $\mathfrak{S}_G$ die Gruppe aller Bijektionen von G nach G ist.

Wir werden zuerst einen Gruppenhomomorphismus von G nach $\mathfrak{S}_G$ konstruieren. Für $g \in G$ definieren wir $f(g): G \rightarrow G$ wie folgt: $\forall h \in G, (f(g))(h) := gh$.

Dann gilt $\forall h \in G, f(e)(h) = h$, mit anderen Worten: $f(e) = \text{id}_G$. Außerdem, $\forall g, g', h \in G$ haben wir:

$$f(g)(f(g')(h)) = f(g)(g'h) = gg'h = f(gg')(h),$$

mit anderen Worten:

$$\forall g, g' \in G, f(g) \circ f(g') = f(gg'). \quad (1)$$

Insbesondere $\forall g \in G$ haben wir: $f(g) \circ f(g^{-1}) = \text{id}_G = f(g^{-1}) \circ f(g)$, das heißt, $f(g)$ ist eine Bijektion. Dann ist $g \mapsto f(g)$ natürlich eine Abbildung von G nach $\mathfrak{S}_G$. Nach (1) ist $f: G \rightarrow \mathfrak{S}_G$ ein Gruppenhomomorphismus.

Wir beweisen jetzt, dass f injektiv ist. Es ist genug zu zeigen, dass $\text{Ker}(f) = \{e\}$ trivial ist. Sei $g \in \text{Ker}(f)$, das heißt $f(g) = \text{id}_G$, dann haben wir tatsächlich:

$$g = ge = f(g)(e) = \text{id}_G(e) = e.$$

Zum Schluss erinnern wir uns daran, dass $f(G)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{S}_G \cong \mathfrak{S}_n$ ist, und f einen Gruppenisomorphismus zwischen G und $f(G)$ bestimmt.

Aufgabe 4.

Sei G eine Gruppe. Erinnern wir uns daran, dass eine Untergruppe $H < G$ normal heißt, wenn $\forall g \in G, gH = Hg$.

Nehmen Sie an, dass H eine Untergruppe von G ist, so dass G/H zwei Elemente hat. Beweisen Sie, dass H normal ist.

Lösung.

Erinnern wir uns, dass $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ die Menge aller Nebenklassen $gH = \{gh \mid h \in H\}$ ist.

Beachten Sie, dass $gH = H$ nur dann gilt, wenn $g \in H$ ist. Tatsächlich, wenn $gH = H$, dann ist insbesondere $g \cdot e \in gH = H$. Und wenn $g \in H$, dann gilt offensichtlich $gH \subseteq H$ und jedes

Element $h \in H$ hat die Form $h = g(g^{-1}h) \in gH$, d.h. $H \subseteq gH$. Ebenso ist $Hg = H$ dann und nur dann, wenn $g \in H$ ist. Insbesondere,

$$\forall g \in H, \quad gH = H = Hg. \quad (2)$$

Unter der Annahme, dass G/H zwei Elemente hat, von denen eines H ist, bezeichnen wir das zweite mit X . Offensichtlich haben wir für jedes $g \notin H$, dass $gH = X$. Das bedeutet, dass für jedes $g \notin H$ $g \cdot e \in X$ gilt, aber da Nebenklassen disjunkt sind, $H \cap X = \emptyset$, gilt $X = G \setminus H$.

Beachten Sie nun, dass für jedes $g, g' \in G$ man $g' \in Hg$ hat, wenn und nur wenn $(g')^{-1} \in g^{-1}H$. Tatsächlich, wenn es $h \in H$ so gibt, dass $g' = hg$, dann $(g')^{-1} = g^{-1}h^{-1} \in g^{-1}H$, und umgekehrt, wenn es $h \in H$ so gibt, dass $(g')^{-1} = g^{-1}h$, dann $g' = h^{-1}g \in Hg$.

Dann haben wir für $g \notin H$ auch $g^{-1} \notin H$, und deshalb $g^{-1}H = G \setminus H$. Das bedeutet aber, dass

$$Hg = \{g' \in G \mid (g')^{-1} \in G \setminus H\} = G \setminus H.$$

Mit anderen Worten: Für jedes $g \in G \setminus H$ gilt $gH = G \setminus H = Hg$, und in Kombination mit (2) erhalten wir, dass

$$\forall g \in G, \quad gH = Hg.$$