Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
31. Oktober 2024

Lineare Algebra I – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 01

Aufgabe 1.
Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

1. Für A, $B \subset Y$ zeigen Sie, dass $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
2. Geben Sie ein Beispiel A, $B \subset X$ an, sodass $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
3. Für A, $B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$ finden Sie eine Bijektion zwischen Y^X und $Y^A \times Y^B$.

Lösung.

1. Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Deshalb müssen wir, um Gleichheit zweier Mengen zu beweisen, zeigen, dass jedes Element der ersten Menge auch in der zweiten Menge und umgekehrt jedes Element der zweiten Menge auch in der ersten Menge liegt.

   Mit anderen Worten: wir müssen beweisen, dass

   a) $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ (das Urbild der Schnittmenge ist in der Schnittmenge der Urbilder enthalten);

   b) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$ (die Schnittmenge der Urbilder ist im Urbild der Schnittmenge enthalten).

   Um a) zu beweisen, muss gezeigt werden, dass für jedes $x \in f^{-1}(A \cap B)$ auch $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ gilt. Sei $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Dann ist $f(x) \in A \cap B$.

   Nach Definition der Schnittmenge ist $f(x) \in A$ und $f(x) \in B$. Da $f(x) \in A$, muss $x \in f^{-1}(A)$ sein, und, da $f(x) \in B$, muss $x \in f^{-1}(B)$ sein. Deshalb ist $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ und wir erhalten a).

   Um b) zu beweisen, muss man zeigen, dass für jedes $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ auch $x \in f^{-1}(A \cap B)$ gilt. Sei $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Dann ist $x \in f^{-1}(A)$ und $x \in f^{-1}(B)$.

   Da $x \in f^{-1}(A)$, muss $f(x) \in A$ sein, und, da $x \in f^{-1}(B)$, muss $f(x) \in B$ sein. Folglich $f(x) \in A \cap B$ und deshalb $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

   Wir haben a) und b) bewiesen, was bedeutet, dass $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

2. Wähle $X = \{0, 1\}$, $Y = \{2\}$, $f(0) = 2 = f(1)$ und $A = \{0\}$, $B = \{1\}$. Dann $A \cap B = \emptyset$ und $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$. Andererseits ist $f(A) = Y = f(B)$ und somit

   $$f(A) \cap f(B) = Y \cap Y = Y \neq \emptyset = f(A \cap B).$$

3. Für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ bezeichnen wir mit $f|_A\colon A \to Y$ die Restriktion von f auf A (d.h. für jedes $a \in A$ definieren wir $f|_A(a) = f(a)$) und ähnlich für $f|_B$. Wir werden zeigen, dass die Funktion $g\colon Y^X \to Y^A \times Y^B$, die $f \in Y^X$ auf $g(f) := (f|_A, f|_B) \in Y^A \times Y^B$ abbildet, eine Bijektion ist.

Um zu beweisen, dass g eine Bijektion ist, müssen wir zeigen, dass sie injektiv und surjektiv ist. Zuerst beweisen wir die Injektivität von g. Seien f_1, $f_2 \in Y^X$ so, dass $g(f_1) = g(f_2)$. Wir müssen zeigen, dass $f_1 = f_2$.

Da $g(f_1) = g(f_2)$, d.h. $(f_1|_A, f_1|_B) = (f_2|_A, f_2|_B)$, folgt, dass $f_1|_A = f_2|_A$ und $f_1|_B = f_2|_B$. Da $f_1|_A = f_2|_A$, erhalten wir für alle $a \in A$, dass $f_1(a) = f_2(a)$ gilt, und, da $f_1|_B = f_2|_B$, gilt für alle $b \in B$, dass $f_1(b) = f_2(b)$. Aber $X = A \cup B$ und es folgt für alle $x \in X$, dass $f_1(x) = f_2(x)$. Das bedeutet, dass $f_1 = f_2$.

Als Nächstes beweisen wir, dass g surjektiv ist. Sei $(u, v) \in Y^A \times Y^B$. Wir müssen zeigen, dass es $f \in Y^X$ gibt, sodass $f|_A = u$ und $f|_B = v$.

Wir definieren $f\colon X \to Y$ wie folgt. Sei $x \in X$. Falls $x \in A$, setze $f(x) := u(x)$, und, falls $x \in B$, setze $f(x) := v(x)$. Da $X = A \cup B$, haben wir $f(x)$ für alle $x \in X$ definiert und, da $A \cap B = \emptyset$, haben wir für jedes $x \in X$ ein eindeutiges $y \in Y$ spezifiziert, das $f(x) = y$ erfüllt. Mit anderen Worten: f ist tatsächlich eine Abbildung von X nach Y. Nach Konstruktion ist $f|_A = u$ und $f|_B = v$.

Aufgabe 2.
Überprüfen Sie die folgenden Relationen $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ auf Reflexivität, (Anti)symmetrie und Transitivität:

1. $R = \{(a, b) \mid a < b\}$;
2. $R = \{(a, b) \mid (a - b)^2 \leq 1\}$;
3. $R = \{(a, b) \mid a - b \text{ ist gerade}\}$.

Lösung.

1. Es gibt $x \in \mathbb{Z}$, z.B. $x = 0$, so, dass $x \not< x$. Somit ist R nicht reflexiv.

   Es gibt x, $y \in \mathbb{Z}$, z.B. $x = 0$, $y = 1$, so, dass $x < y$ aber $y \not< x$. Also ist R nicht symmetrisch.

   Für zwei verschiedene x, $y \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $x < y$, dann kann $y < x$ nicht gelten. R ist daher antisymmetrisch.

   Für alle x, y, $z \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $x < y$ und $y < z$, dann $x < z$, also ist R transitiv.

2. Für jedes $x \in \mathbb{Z}$ gilt $(x - x)^2 \leq 1$, also ist R reflexiv.

   Für alle x, $y \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $(x - y)^2 \leq 1$, dann ist auch $(y - x)^2 \leq 1$. R ist daher symmetrisch.

   Es gibt verschiedene x, $y \in \mathbb{Z}$, z.B. $x = 0$, $y = 1$, so, dass $(x - y)^2 \leq 1$ und $(y - x)^2 \leq 1$, also ist R nicht antisymmetrisch.

   Es gibt x, y, $z \in \mathbb{Z}$, z.B. $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$, so, dass $(x - y)^2 \leq 1$ und $(y - z)^2 \leq 1$, aber $(x - z)^2 \not\leq 1$, also ist R nicht transitiv.

3. Für jedes $x \in \mathbb{Z}$ ist $x - x = 0$ gerade, also ist R reflexiv.

   Für alle x, $y \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $x - y$ gerade ist, dann ist auch $y - x$ gerade, also ist R symmetrisch.

   Es gibt verschiedene x, $y \in \mathbb{Z}$, z.B. $x = 0$, $y = 2$, so, dass $x - y$ und $y - x$ gerade sind, also ist R nicht antisymmetrisch.

   Für alle x, y, $z \in \mathbb{Z}$ gilt: wenn $x - y$ und $y - z$ gerade sind, dann ist auch $x - z = (x - y) + (y - z)$ gerade, also ist R transitiv.

Aufgabe 3.
Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ deren Potenzmenge. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ nicht surjektiv sein kann.

Lösung.
Wir wollen zeigen, dass es keine surjektive Abbildung $X \to \mathcal{P}(X)$ geben kann.

Um einen Widerspruch zu erhalten, nehmen wir an, dass es doch eine surjektive Abbildung $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ gibt.

Wir definieren nun die Menge $M := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$, $M \in \mathcal{P}(X)$. Da f nach Annahme surjektiv ist, gibt es ein $m \in X$ mit $f(m) = M$. Dann gilt aber nach Definition von M:

$$m \in M = f(m) \Rightarrow m \notin M = f(m) \Rightarrow m \in M.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch ist und es keine surjektive Abbildung $X \to \mathcal{P}(X)$ geben kann.

Aufgabe 4.
Seien A und B Mengen mit injektiven Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$. Zeigen Sie, dann existiert eine Bijektion $h\colon A \to B$.

Lösung.
Definiere die Mengen:

$$C_0 := A \setminus g(B); \quad C_n := g(f(C_{n-1})) \text{ für } n \geq 1; \quad C := \bigcup_{n \geq 0} C_n.$$

Für jedes $x \in A$ setze: $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in C; \\ g^{-1}(x) & \text{falls } x \notin C. \end{cases}$

Da im Falle, dass x nicht in C ist, x in $g(B)$ liegen muss, gibt es wegen der Injektivität von g ein eindeutig bestimmtes Element $g^{-1}(x)$ und h ist somit eine wohldefinierte Abbildung von A nach B.

Wir zeigen nun, dass $h\colon A \to B$ die gewünschte Bijektion ist.

Zuerst beweisen wir, dass h surjektiv ist. Sei y in B.

Wenn $y \in f(C)$, dann gibt es $x \in C$ so, dass $f(x) = y$. Dann ist $h(x) = f(x) = y$.

Wenn $y \notin f(C)$, sei $x := g(y)$.

Nehmen wir zunächst an, dass $x \in C$ liegt. Es gilt aber $x = g(y) \notin C_0$, d.h. es gibt $n \geq 0$ so, dass $x \in g(f(C_n))$. Mit anderen Worten: es gibt $c \in C_n$ so, dass $g(f(c)) = x = g(y)$. Da g injektiv ist, bedeutet das, dass $y = f(c)$, was unserer Annahme über y widerspricht.

Der Widerspruch zeigt, dass $x \notin C$. Dann ist $h(x) = g^{-1}(g(y)) = y$.

Auf jeden Fall haben wir x in A gefunden so, dass $h(x) = y$. Da y beliebig war, haben wir bewiesen, dass h surjektiv ist.

Beweisen wir nun, dass h injektiv ist. Seien $x_1, x_2 \in A$ so, dass $h(x_1) = h(x_2)$. Wir betrachten drei Fälle.

Wenn $x_1{,}x_2 \in C$, dann $f(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = f(x_2)$, und da f injektiv ist, schließen wir, dass $x_1 = x_2$.

Wenn $x_1{,}x_2 \notin C$, dann $g^{-1}(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = g^{-1}(x_2)$, und deshalb $x_1 = g(g^{-1}(x_1)) = g(g^{-1}(x_2)) = x_2$.

Wenn zum Beispiel $x_1 \in C$, $x_2 \notin C$, dann $f(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = g^{-1}(x_2)$, also

$$x_2 = g(g^{-1}(x_2)) = g(f(x_1)) \in C.$$

Der Widerspruch zeigt, dass der dritte Fall unmöglich ist.

Deshalb haben wir für beliebige x_1, $x_2 \in A$ mit $h(x_1) = h(x_2)$ bewiesen, dass $x_1 = x_2$, d.h. dass h injektiv ist.

Beispiel.
Betrachten Sie das folgende Beispiel. Sei $A = (-1, 1)$ ein offenes und $B = [-1, 1]$ ein geschlossenes Intervall. Sei $f\colon A \to B$ die natürliche Inklusionsabbildung, $f(a) = a$, und definiere $g\colon B \to A$ als $g(b) := b/2$ (nach Konstruktion sind f und g injektiv).

Dann,

$$\begin{aligned}
C_0 &= A \setminus [-1/2, 1/2] = (-1, -1/2) \cup (1/2, 1), \\
C_1 &= (-1/2, -1/4) \cup (1/4, 1/2), \\
&\dots \\
C_n &= (-1/2^n, -1/2^{n+1}) \cup (1 - 2^{n+1}, 1/2^n), \\
&\dots \\
C &= A \setminus (\{\pm 1/2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}).
\end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist $h(x) = x$ für $x \in C$ und $h(x) = 2x$ für $x \in \{\pm 1/2^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$. Offensichtlich ist h eine Bijektion zwischen $(-1, 1)$ und $[-1, 1]$.