Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
21. Dezember 2024

Lineare Algebra I – Übungsblatt 09

Aufgabe 1.
Beweisen Sie, dass

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Geben Sie die Koordinaten $x_i^{\mathcal{B}}(e_j)$ der Standardbasisvektoren e_1, e_2 an.
Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 2 aus Übungsblatt 6 benutzen.

Aufgabe 2.
Für eine Matrix und Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

bestimmen Sie alle Lösungen

1. des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot X = 0$;
2. des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot X = B$;
3. des inhomogenen linearen Gleichunsgsystems $A \cdot X = B'$.

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x + ty + z = 0 \\ tx + y + z = 0 \end{cases}$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.
Sei $f\colon U \to V$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass

$$\dim V - \dim U = \dim \mathrm{Coker}(f) - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

ist.