Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
14. Dezember 2024

Lineare Algebra I – Übungsblatt 08

Aufgabe 1.
Sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass die Multiplikation im Matrizenring $\mathrm{M}_2(K)$ nicht kommutativ ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(K)$.

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper, $a \in K$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie den Kern $\mathrm{Ker}(A)$ und das Bild $\mathrm{Im}(A)$ der Matrix A, die als Endomorphismus von K^2 betrachtet wird. Bestimmen Sie insbesondere die Dimensionen dieser Vektorräume in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 3.
Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $W \leq V$ ein Unterraum. Bezeichnen Sie mit $r = \dim V - \dim W$.

1. Beweisen Sie, dass es lineare Formen $f_i \colon V \to K$, $1 \leq i \leq r$, gibt, so dass $W = \{v \in V \mid f_i(v) = 0,\ 1 \leq i \leq r\}$ gilt.
2. Ist es möglich lineare Formen $g_i \colon V \to K$, $1 \leq i \leq k$ für $k < r$ zu finden, so dass $W = \{v \in V \mid g_i(v) = 0,\ 1 \leq i \leq k\}$ gilt?

Aufgabe 4.
Sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f \colon V \to V$ ein linearer Endomorphismus, so dass $f \circ f = f$.

1. Zeigen Sie, dass $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Für $V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ beschreibe man alle möglichen Matrizen einer solchen linearen Abbildung f (z.B. in einer Standardbasis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ von V).
3. Beweisen Sie, dass V eine Basis $\mathcal{B}$ zulässt, so dass die Matrix von f in dieser Basis die Form $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ hat.