Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
6. Dezember 2024

Lineare Algebra I – Übungsblatt 07

Aufgabe 1.
Beweisen Sie, dass die Menge $\{\ln(p) \mid p \text{ eine Primzahl}\}$ $\mathbb{Q}$-linear unabhängig ist (insbesondere ist $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ unendlich).
Hinweis: Sie können benutzen, dass der natürliche Logarithmus $\ln\colon (\mathbb{R}^{>0}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 2.
Sei $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i \in I}$ ein Basis eines Vektorraums V, und sei $I = J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_m$ eine Partition der Menge I. Bezeichnen Sie mit $V_k := \langle e_j \mid j \in J_k \rangle \leq V$. Beweisen Sie, dass $V \cong \bigoplus_{k=1}^m V_k$ gilt.

Aufgabe 3.
Sei $f\colon V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung, und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Beweisen Sie, dass U ein Komplement zu $\mathrm{Ker}(f)$ ist, wenn und nur wenn $f|_U\colon U \to W$ ein linearer Isomorphismus ist.

Aufgabe 4.
Sei K ein endlicher Körper. Beweisen Sie, dass die Mächtigkeit $|K|$ von K gleich p^n für eine Primzahl p und eine positive ganze Zahl n ist.
Hinweis: Um die Primzahl p zu bestimmen, betrachten Sie den Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to K$.