Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
30. November 2024

Lineare Algebra I – Übungsblatt 06

Aufgabe 1.
Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\mathcal{B} := \{1, z\}$.

1. Für welche z ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum?
2. Falls $\mathcal{B}$ eine Basis ist, geben Sie eine explizite Formel für die Koordinaten $x_i^{\mathcal{B}}(v)$ von $v \in \mathbb{C}$ an.

Aufgabe 2.
Sei $u = (a, b)$, $v = (c, d) \in K^2$ für einen Körper K und $\mathcal{B} = \{u, v\}$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von K^2 ist, wenn und nur wenn $ad - bc \neq 0$.

Aufgabe 3.
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Beweisen Sie, dass $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, wenn und nur wenn für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ der Vektor v_k nicht zu dem Vektorraum $\langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle$ gehört.

Aufgabe 4.

1. Sei K ein unendlicher Körper und $n \geq 2$. Beweisen Sie, dass K^n nicht als endliche Vereinigung echter Untervektorräume geschrieben werden kann.
2. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ für eine Primzahl p als endliche Vereinigung echter Untervektorräume geschrieben werden kann.