Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
22. November 2024

Lineare Algebra I – Übungsblatt 05

Aufgabe 1.
Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$, die $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ auf $f(x, y) := 2x + 3y$ schickt.

1. Beweisen Sie, dass f eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.
2. Zeigen Sie, dass der "Unterraum der Lösungen"

$$U := \operatorname{Ker}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid 2x + 3y = 0\} \leq \mathbb{Q}^2$$

lässt sich von einem Element $b \in U$ erzeugen.

Aufgabe 2.
Betrachten Sie einen Gruppenhomomorphismus $g\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, der $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ auf $g(x, y) := 2x + 3y$ schickt. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\operatorname{Ker}(g)$ zyklisch ist, d.h. lässt sich von einem Element $b \in \operatorname{Ker}(g)$ erzeugen.

Aufgabe 3.
Sei K ein Körper und betrachte den Vektorraum $V = K^n$ über K für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Erinnern wir uns daran, dass als $e_i \in V$ das Element $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in K^n$ mit 1 an der i-ten Position und Nullen sonst bezeichnet wird (für $1 \leq i \leq n$). Es sei $f_i := e_i + e_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n - 1$. Bezeichnen Sie mit U den Unterraum $U := \langle f_1, \ldots, f_{n-1} \rangle \leq V$, der von den f_i erzeugt wird.

1. Beweisen Sie, dass $e_1 + (-1)^n e_n = (1, 0, \ldots, 0, (-1)^n) \in U$.
2. Beweisen Sie, dass $e_1 \notin U$.
3. Finde Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$, so dass für $v = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ gilt: $v \in U$, wenn und nur wenn $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$ (mit anderen Worten, finde eine Gleichung, die U bestimmt).

Aufgabe 4.

1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, U_1, $U_2 \leq V$ Unterräume, und nehme an, dass $U_1 + U_2 = V$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   a) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$;
   b) die Abbildung $U_1 \oplus U_2 \to V$, die (u_1, u_2) auf $u_1 + u_2$ schickt, ist eine lineare Bijektion.
2. Beweisen Sie, dass für $V = K^n$, $U_1 = U = \langle f_1, \ldots, f_{n-1} \rangle$ aus Aufgabe 3 und $U_2 = \langle e_1 \rangle$ eine lineare Bijektion zwischen $U_1 \oplus U_2$ und V existiert.