



Prof. Dr. Fabien Morel

Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25

21. November 2024

Lineare Algebra I – Übungsblatt 04

Aufgabe 1.

Erinnern wir uns daran, dass eine Abbildung $f: R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus ist, wenn:

1. $f(1) = 1$;
2. $\forall a, b \in R \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$;
3. $\forall a, b \in R \quad f(ab) = f(a)f(b)$.

Sei R ein Körper und S ein Ring mit $1 \neq 0$. Beweisen Sie, dass jeder Ringhomomorphismus $f: R \rightarrow S$ injektiv ist.

Aufgabe 2.

1. Beweisen Sie, dass $i, \sqrt{2} \in \mathbb{C}$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.
Hinweis: Beweisen Sie es durch Widerspruch.
2. Für $r = \sqrt{2}$ oder $r = i$ bezeichne

$$\mathbb{Q}[r] = \{a + br \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}[r]$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 3.

Erinnern wir uns daran, dass ein kommutativer Ring R mit $1 \neq 0$ ein Integritätsbereich genannt wird, falls $\forall a, b \in R$, wenn $ab = 0$ und $a \neq 0$, dann $b = 0$.

1. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}/4$ kein Integritätsbereich ist.
2. Beweisen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.

Aufgabe 4.

Eine Gruppe G heißt zyklisch, wenn sie von einem Element erzeugt ist, d.h. wenn $\exists g \in G$, sodass $\langle g \rangle = G$.

1. Sei G eine zyklische Gruppe, $H \leq G$. Beweisen Sie, dass H auch zyklisch ist.
Hinweis: Betrachten Sie das minimale Element der Menge $\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid g^n \in H\}$.
2. Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Gruppe $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ zyklisch ist.
Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 4 aus Übungsblatt 4 aus Analysis einer Variablen verwenden.
3. Beweisen Sie, dass jede endliche Untergruppe von $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ zyklisch ist.