LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Andrei Lavrenov, Oliver Hendrichs

Wintersemester 2024/25
2. November 2024

Lineare Algebra I – Übungsblatt 02

Aufgabe 1.
Sei G eine Menge mit zwei Elementen. Beweisen Sie, dass G genau zwei Gruppenstrukturen zulässt.
Hinweis: Beweisen Sie, dass die Wahl des neutralen Elements die Gruppenstruktur bestimmt.

Aufgabe 2.
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und H eine Teilmenge von G. Wir definieren eine Relation

$$R = \{(x, y) \in G \times G \mid x \cdot y^{-1} \in H\}.$$

Beweisen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist genau dann, wenn $H \neq \emptyset$ und das Folgende gilt:

$$\forall x, y \in H \quad x \cdot y^{-1} \in H.$$

Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass $\forall x, y \in G \quad (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Aufgabe 3.

1. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Relation $R_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \text{ dividiert } x - y\}$. Beweisen Sie, dass R_n eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.
2. Für $x \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\overline{x}$ das Bild von x unter der kanonischen Projektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/R_n$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}/R_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

Aufgabe 4.
Geben Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ an.
Hinweis: Verwenden Sie, dass jede natürliche Zahl (ungleich 0) ein Produkt aus einer ungeraden Zahl und einer Zweierpotenz ist.