



Lineare Algebra I – Übungsblatt 13

Aufgabe 1.

Berechnen Sie das charakteristische Polynom sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, so dass die darstellende Matrix von φ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ gegeben sei durch:

$$M := M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Zeigen Sie, 2 ist ein Eigenwert von φ .
2. Geben Sie eine Basis von $V_2(\varphi)$ an.
3. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{\varphi}(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_3 - M)$.
4. Zeigen Sie, dass, wenn $a \leq 0$, 2 der einzige Eigenwert von φ ist.
5. Zeigen Sie, dass, wenn $a > 0$, φ genau drei verschiedene Eigenwerte hat.
6. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, wann φ diagonalisierbar ist.
7. Sei nun $a \in \mathbb{Q}$. Wir betrachten M als Element in $M_3(\mathbb{Q})$ und bezeichnen mit $\Phi: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ die $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung, so dass die darstellende Matrix von Φ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{Q}^3$ die Matrix M ist. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{Q}$, wann Φ diagonalisierbar ist.